Министерство образования и науки Украины
Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова

Хачатуров Сергей Юрьевич

УДК 517. 926

Многоэлементная задача Карлемана и её применение к дифференциальным уравнениям

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Автореферат

диссертация на соискание научного звания
кандидата физико-математических наук

Одесса – 2001

Диссертация является рукописью.

Робота выполнена на кафедре высшей математики Одесского национального университета им. И.И. Мечникова Министерства образования и науки Украины

Научный руководитель	Доктор физико-математических наук, доцент **Керекеша Петр Владимирович,** Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, профессор кафедры высшей математики
Официальные опоненты:	Доктор физико-математических наук, профессор **Тихоненко Николай Яковлевич**, Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, заведующий кафедрой математического обеспечения компьютерных систем; Кандидат физико-математических наук, доцент **Бигун Ярослав Йосипович**, Черновецкий национальный университет им. Федковича, заведующий кафедрой прикладной математики и механики.
Ведущая организация:	**Харковский национальный университет им. В.Н.Каразина** Министерства образования и науки Украини, кафедра вычислительной математики и математической физики, г. Харков

Защита состоится " _2_ " ___марта__ 2001 года в __15__ часов на заседании специализированного ученого совета № К.41.051.05 при Одесском национальном университете им. И.И. Мечникова (65026, г. Одесса, ул. Дворянская, 2)

С диссертацией можно ознакомится в научной библиотеке Одесского национального университета им. И.И. Мечникова (65026, г. Одесса, ул. Преображенская, 24)

Автореферат розослан "_26__"__января___ 2001 г.

Ученый секретарь
специализированого ученого совета Витюк А.Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. При исследовании прикладных задач, в частности, задач моделирования и прогнозирования физических явлений, используются в качестве математических моделей обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных и дифференциально-разностные уравнения.

При исследовании указанных дифференциальных уравнений используют различные методы. Одним из новых и перспективных является комбинированный метод интегральных преобразований и сопряжения аналитических функций. Этот метод включает в себя конструктивную мощь интегральных преобразований и стройность теории функций комплексного переменного.

Термин "сопряжение" был введен известным математиком и механиком М.И. Мусхелишвили. Метод решения краевых задач с помощью сопряжения аналитических функций называется методом сопряжения. При этом сопряжение осуществляется линейным способом и через границу области. Такое сопряжение ещё называют задачей Римана.

Второй задачей сопряжения является задача Карлемана (дальше ЗК), но только сопряжение аналитических функций осуществляется несколько сложным путём.

Граничную задачу, носящую его имя, Т. Карлеман представил в 1932 году на II конгрессе математиков (г. Цюрих).

Теория ЗК и её обобщение изложено в монографии Г.С. Литвинчука. (Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.) Там же приводится обширная библиография по ЗК. Приведённые в ней исследования в основном имеют качественный характер. И только при выходе в свет работы Ю.Й. Черского (Черский Ю.Й. Нормально - разрешенное уравнение плавного перехода // ДАН СССР. – 1970. – 190, № 1. – С. 57-60.) исследования по ЗК стали носить конструктивный характер.

Начиная с 80-х годов XX столетия с помощью ЗК для полосы были получены решения задач математической физики, ранее "недоступных" известными методами. Здесь следует отметить работы Банцури Р.Д., Дащенко О.Ф., Керекеши П.В., Тихоненка Л.Я., Попова Г.Я., Нуллера В.М.

У 1974 году Ю.Й. Черский впервые показал, что линейные дифференциальные уравнения (дальше ЛДУ) с полиномиальными коэффициентами специального вида с помощью интегрального преобразования сводятся к ЗК для полосы. Эту задачу он решил в квадратурах и тем самым указал метод точного решения рассмотренного класса ЛДУ.

Научный интерес к аналитическим решениям ЛДУ существовал и будет существовать. Это связано с тем, что аналитические решения дают возможность более адекватно исследовать реальные явления, которые моделируются соответствующими дифференциальными уравнениями. В известном справочнике Камке Э. приводятся примеры точных решений ЛОДУ с полиномиальными коэффициентами со второго до четвёртого порядков включительно. Но в приведённых примерах не видно единого метода их решения. Относительно метода, что базируется на исследовании ЗК для полосы, то он в является в некоторой мере универсальным. Он позволяет исследовать ЛДУ с полиномиальными коэффициентами в общем случае. Однако при этом нужно проводить исследования многоэлементной ЗК для полосы. Более того, существует класс ЛДУ с экспоненциальными коэффициентами и класс краевых задач математической физики, которые также с помощью интегрального преобразования Фурье сводятся к многоэлементной ЗК для полосы. Поэтому исследования многоэлементной ЗК для полосы является актуальным как с точки зрения развития теории ЗК для полосы, так и сточки зрения применения теории ЗК для решения новых классов дифференциальных уравнений.

В последнее время, кроме ЗК для полосы исследуется и ЗК в кольце. Научных работ, посвященных исследованию ЗК в кольце очень мало.

Конструктивным решением ЗК в кольце занимались Зверович Е.И., Керекеша П.В. и Черский Ю.Й., а разработкой аналитических приближённых методов для решения ЗК в кольце – Н.Я. Тихоненко. Иные работы в этом направлении нам не известно. В связи с этим актуальной является проблема развития теории ЗК в кольце.

ЛДУ с осциллирующими коэффициентами также является предметом исследования в диссертации. Изучение таких уравнений активно проводятся в последнее время. Поэтому исследование ЛДУ указанного типа также является актуальной проблемой. Кроме того метод исследования отличается от известных. Он базируется на исследовании функционального уравнения со сдвигом на вещественную ось.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Работа по указанной тематике проводилась в Институте математики, экономики и механики Одесского национального университета в рамках плановых бюджетных тем научно-исследовательских работ, а также в рамках выполнения темы 1.153 ДК Украины.

Цели и задачи исследования. Целью данной работы является построение решений (точных и приближённых) некоторых классов дифференциальных уравнений. Рассматриваются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных и дифференциально-разностные уравнения, сводящиеся к задачам Карлемана для полосы и кольца. Метод исследования заключается в построении конструктивного решения ЗК, а, следовательно, и - решения исходных дифференциальных уравнений. При сведении дифференциальных уравнений к ЗК используются аппараты преобразований Фурье и Лорана.

Научная новизна полученных результатов состоит в следующем:

1) впервые получено точное решение ЗК в кольце для двух пар функций в частном случае;

2) доказано существование и единственность решения ЗК в кольце;

3) получено точное решение одного класса линейных дифференциальных уравнений n-го порядка с полиномиальными и экспоненциальными коэффициентами, а также дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами;
4) описан класс бесконечных систем алгебраических уравнений плавного перехода, которые сводятся к ЗК в кольце;
5) обоснован аналитический метод приближенного решения многоэлементной ЗК в кольце и в полосе.

Практическое значение полученных результатов. Диссертация имеет как теоретическое, так и практическое значение. Теоретическая ценность состоит в доказательстве существования решения ЗК в кольце и в конструктивном построении решения для ряда классов дифференциальных уравнений. Для тех случаев, когда не удаётся построить точное решение, разработан метод приближенного решения трёхэлементной ЗК в кольце и усовершенствован метод приближённого решения многоэлементной ЗК в полосе. Практическая ценность работы находит своё отражение в возможности использования её результатов в задачах математической физики (теория упругости, теория распространения волн и т.д.).

Личный вклад диссертанта. Работы [2,3,5] выполнены в соавторстве с научным руководителем. В работе [2] научному руководителю принадлежит постановка ЗК для двух пар функций, метод её решения в случае нулевого индекса и практическое применение. Реализация метода конструктивного решения ЗК в случае нулевого индекса и исследования более общего случая принадлежит диссертанту. Реализована также схема построения решения двух бесконечных систем плавного перехода, предложенная научным руководителем. В роботе [3] научному руководителю принадлежат постановка задачи и метод её решения, а также исследование поведения изгибающего момента в угловых точках. Исследование условий разрешимости, построение приближённого решения, исследование сходимости и численный эксперимент принадлежат диссертанту.

В роботе [5] научному руководителю принадлежат постановка задачи и метод её решения. Исследование условий сходимости и единственности решения принадлежат диссертанту.

В роботе [4] соавтору принадлежит сведение однородного дифференциального уравнения с осциллирующими коэффициентами к функциональному уравнению. Исследование и построение решения функционального уравнения принадлежат соискателю.

Апробация результатов диссертации. Результаты работы докладывались и обсуждались на международной научной конференции "Алгебра и анализ" (Казань, 1994); на IV международной конференции по механике неоднородных структур (Тернополь, 1995); на V международной конференции им. М. Кравчука (Киев, 1996); на Воронежской весенней математической школе “Понтрягинские чтения -XI” “Современные методы в теории краевых задач ” (Воронеж, 2000); на международной конференции “Дифференциальные и интегральные уравнения» (Одесса, 2000); на научном семинаре кафедры методов математической физики ИМЭМ ОНУ (руководитель семинара - проф. Г.Я. Попова); на научном семинаре кафедры вычислительной математики ИМЭМ ОНУ (руководитель семинара - проф. Н.Я. Тихоненко).

Публикации. По теме диссертации опубликовано семь работ, две из которых – в отечественных ведущих профессиональных изданиях, одна – в сборнике научных трудов, три – в сборниках докладов международных конференций, одна работа депонирована.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из вступления, пяти глав, приложения и списка использованных источников из 70 наименований. Общий объем диссертации составляет 129 страниц машинописного текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во вступлении обоснованы актуальность темы диссертации, сформулирована цель работы, изложены основные результаты.

Первый раздел посвящен обзору литературы по теме диссертации.

Во втором разделе изложен метод решения дифференциальных уравнений, которые рассматриваются в диссертации. Методика решения этих уравнений базируется на решении ЗК с использованием преобразований Фурье и Лорана.

В подразделе 2.1 исследованы вопросы существования решения ЗК в кольце с радиальным сдвигом во внутрь области:

$$A(t)\Phi(Rt) + B(t)\Phi(R^{-1}t) + C(t)\Phi(t) = G(t), \qquad |t| = 1, \tag{1}$$

де $A(t), B(t), C(t), |t|=1$ - известные функции, принадлежащие пространству Винера W ($A(t)\in W$, если $L^{-1}A(t) = a_n, a_n \in l_1$, L^{-1} - обратный оператор Лорана); $G(t)$, $|t|=1$ - известная функция из $L_2(|t|=1)$, а $\Phi(z)$ -искомая аналитическая функция в кольце $R^{-1} < |z| < R$, $1 < R < \infty$. Используя замену $t = e^{i\alpha}$ и интегральное представление аналитической периодической функции в кольце, полученное научным руководителем (Керекеша П.В. Интегральное представление аналитической периодической функции в полосе // Тр. респ. научно-методич. конф., посв. 200-летию со дня рождения Н.И. Лобачевского. – Одесса. – 1992. – С. 38-39), сведём ЗК (1) к интегральному уравнению

$$\varphi_0(\alpha) + D(\alpha)\frac{K'}{2\pi \ln R}\int_0^{2\pi} cs\frac{K'}{\ln R}(\alpha-\theta)\varphi_0(\theta)d\theta + E(\alpha)\frac{K'}{2\pi \ln R}\int_0^{2\pi} dn\frac{K'}{\ln R}(\alpha-\theta)\varphi_0(\theta)d\theta = H(\alpha), 0 \le \alpha \le 2\pi ,$$

где $dn\alpha$, $cs\alpha$- двоякопериодические функции Якоби, K и K' – действительный и мнимый четверть периоды, связанные соотношением $\frac{K}{K'}=\frac{\pi}{\ln R}$, а $\varphi(t)\in L_2(|t|=1)$ - искомая функция, $\varphi_0(\alpha)=\varphi(e^{i\alpha})$, $D(\alpha)=\frac{2(A(e^{i\alpha})-B(e^{i\alpha}))}{A(e^{i\alpha})+B(e^{i\alpha})}$, $E(\alpha)=\frac{2C(e^{i\alpha})}{A(e^{i\alpha})+B(e^{i\alpha})}$, $H(\alpha)=\frac{2G(e^{i\alpha})}{A(e^{i\alpha})+B(e^{i\alpha})}$.

В симметричном случае ($A(t)\equiv B(t), |t|=1$) интегральное уравнение будет иметь вид:

$$\varphi_0(\alpha)=(S\varphi_0)(\alpha)=-E(\alpha)\frac{K'}{2\pi\ln R}\int_0^{2\pi}dn\frac{K'}{\ln R}(\alpha-\theta)\varphi_0(\theta)d\theta+H(\alpha),\ 0\le\alpha\le 2\pi,$$

где S – линейный оператор, действующий из $L_2([0,2\pi])$ в $L_2([0,2\pi])$. Тогда, имеет место

Теорема 2.1. *Пусть оператор S действует из* $L_2([0,2\pi])$ *в* $L_2([0,2\pi])$ *и пусть* $\gamma=\max_{\alpha\in[0,2\pi]}\left|\frac{C(e^{i\alpha})}{A(e^{i\alpha})}\right|$. *Тогда ЗК (1), в классе* $L_2(|t|=1)$, *имеет единственное решение.*

В несимметричном случае $A(t)\ne B(t), |t|=1$ ЗК (1) сводится к полному особому интегральному уравнению с ядром Гильберта, которая с помощью регуляризации сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода $\varphi_0(\alpha)+\int_0^{2\pi}R(\alpha,\theta)\varphi_0(\theta)d\theta=f(\alpha)$, $0\le\alpha\le 2\pi$, де $f(\alpha)$ - известная функция, $R(\alpha,\theta)$ - фредгольмово ядро, $\varphi_0(\alpha)$ - искомая функция. Теперь вопрос существования решения задачи (1) сводится к вопросу существования решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

ЗК в кольце для двух пар функций, рассмотренная в подразделе 2.2., состоит в нахождении двух пар аналитических в кольце функций $\Phi(z),\Psi(z)$, которые удовлетворяют на границе кольца $R^{-1}<|t|<R$, $R>1$ следующим условиям:

$$\begin{cases}\Phi(R^{-1}t)+A(t)\Psi(Rt)=G_1(t)\\ \Phi(Rt)+B(t)\Psi(R^{-1}t)=G_2(t)\end{cases},\ |t|=1, \tag{2}$$

где заданные функции $G_1(t)$, $G_2(t)$ принадлежат $L_2(|t|=1)$, а известные функции $A(t)$ и $B(t)$ отличны от нуля окружности $|t|=1$ и принадлежат пространству Винера W.

Пусть $IndA(t)=\kappa_1$, $IndB(t)=\kappa_2$. Тогда факторизацию функций $A(t)$, $B(t)$ проведём таким образом:

$$A(t)=\lambda_0\left(\frac{R^{-1}t-a}{Rt-a}\right)^{\kappa_1}\frac{X_1(R^{-1}t)}{X_2(Rt)},\ B(t)=\mu_0\left(\frac{R^{-1}t-a}{Rt-a}\right)^{\kappa_2}\frac{X_1(Rt)}{X_2(R^{-1}t)}.$$

В частном случае ($\kappa=\kappa_1=-\kappa_2$) постоянные λ_0,μ_0 можно определить так:

$$\lambda_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\ln\left[\left(\frac{R^{-1}\tau-a}{R\tau-a}\right)^{\kappa}A_0(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau}\right),\ \ \mu_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\ln\left[\left(\frac{R\tau-a}{R^{-1}\tau-a}\right)^{\kappa}B_0(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau}\right).$$

Положим $\Delta' = \mu_0 R^{-2n} - \lambda_0 R^{2n}$. Тогда, если $\kappa = 0$ и $\Delta' \neq 0$, то существует единственное и безусловное решение задачи (2):

$$\Phi(t) = \mu_0\frac{X_1(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)\tau} - \lambda_0\frac{X_1(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)\tau},$$

$$\Psi(t) = \frac{X_2(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)\tau} - \frac{X_2(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)\tau},$$

где функции $X_1(t), X_2(t)$ определяются так:

$$X_1(t) = \exp\left\{C_1 - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{\ln A_0(\tau)-\ln\lambda_0}{\tau}d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{\ln B_0(\tau)-\ln\mu_0}{\tau}d\tau\right\},$$

$$X_2(t) = \exp\left\{C_2 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{\ln A_0(\tau)-\ln\lambda_0}{\tau}d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{\ln B_0(\tau)-\ln\mu_0}{\tau}d\tau\right\},$$

а функции $H_1(t), H_2(t)$ - известные.

Если $\Delta' = 0$, то для разрешимости ЗК необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\int\limits_{|\tau|=1}\frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)\tau} = \int\limits_{|\tau|=1}\frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)\tau},\ \bar{n} = 0, \lambda_0 = \mu_0,$$

$$\mu_0\int\limits_{|\tau|=1}\frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)\tau^{\nu+1}} = \lambda_0 R^{2\nu}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)\tau^{\nu+1}},\ \bar{n} = \nu, \nu\in Z,$$

где $\bar{n} = \begin{cases} 0 & , \quad \lambda_0 = \mu_0 \\ \nu & , \ \nu = \dfrac{\ln\mu_0 - \ln\lambda_0}{4\ln R} \quad \lambda_0 \neq \mu_0,\ \nu\in Z \end{cases}.$

Если выполняются эти условия, то ЗК имеют решение, зависящее от постоянных C_1, C_2:

$$\Phi(t) = X_1(t)\left[C_1 t^{\bar{n}} + \frac{\mu_0}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}_{\bar{n}}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)\tau} - \frac{\lambda_0}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}_{\bar{n}}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)\tau}\right],$$

$$\Psi(t) = X_2(t)\left[C_2 t^{\bar{n}} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}_{\bar{n}}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)\tau} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}_{\bar{n}}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)\tau}\right].$$

Рассмотрены также случаи, когда индекс к отличен от нуля. При этом в случае $\kappa_1 = -\kappa_2$ также получены условия разрешимости ЗК (2) и построены соответствующие решения.

В подразделе 2.3. рассматривается ЗК:

$$A(t)\Phi(Rt) + B(t)\Phi(R^{-1}t) + C(t)\Phi(t) = G(t), \qquad |t| = 1, \tag{3}$$

где $A(t)=\frac{t+1}{2\sqrt{t}}, B(t)=i\frac{t-1}{2\sqrt{t}}, C(t)=\frac{t+1}{2\sqrt{t}}-i\frac{t-1}{2\sqrt{t}}$, $G(t)$ известная функция из пространства $L_2(|t|=1)$, а $\Phi(z)$ - искомая аналитическая в полосе $R^{-1}<|z|<R$, $1<R<\infty$ функция. . Используя интегральное представление аналитической функции в кольце, ЗК (3) можно свести к уравнению типа свёртки с 2π- периодическим ядром и периодическим множителем. Далее, раскладывая функции Якоби $dn\alpha$, $cs\alpha$ в ряд и используя свойства дискретного преобразования Фурье, приходим к уравнению $f_n=-\frac{\beta_4+\beta_2 T_n}{\beta_3+\beta_1 T_n}f_{n-1}+\beta_3\frac{\beta_4+\beta_2 T_n}{\beta_3+\beta_1 T_n}h_{0,n}-\beta_4 h_{0,n}$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, которое в свою очередь решено методом факторизации.

Точное решение ЗК (1) удаётся построить только в частных случаях, поэтому возникает вопрос построения его приближенного решения с соответствующими оценками сходимости.

В подразделе 2.4. обоснован метод приближенного решения ЗК, который базируется на использовании метода Бубнова-Галёркина. Согласно методу Бубнова-Галёркина, $\Phi_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k t^k$ - приближенное решение ЗК в кольце, тогда:

$$\left\{\sum_{k=-n}^{n}a_{km}\alpha_k=h_m,\qquad m=\overline{-n,n},\right.$$

где $a_{km}=((\mathrm{A(t)\,R^{k}+B(t)\,R^{-k}+C(t)})\,\mathrm{t}^{k}\ ,\ \mathrm{t}^{m})$, $h_m=(\mathrm{H(t)}\ ,\ \mathrm{t}^{m})$, $|t|=1$, $k=\overline{-n,n}$.

Построено также приближенное решение многоэлементной ЗК для полосы $\sum_{p=-m}^{m}A_p(\lambda)\Phi(\lambda+pi)=H(\lambda)$, где $A_p(\lambda)$, $\mathrm{p}=\overline{-\mathrm{m},\mathrm{m}}$ непрерывны на $0X$ функции, $H(\lambda)\in L_2(R)$ - известная функция, а неизвестную функцию $\Phi(z)$ ищем в полосе $-m<\operatorname{Im}z<m$ в виде разложения ряда Фурье по ортонормированной системе функций $\Phi_n(\lambda)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}[\alpha_k^+\varphi_k^+(\lambda)+\alpha_k^-\varphi_k^-(\lambda)]$, де $\varphi_0(\lambda)=1$, $\varphi_k^{\pm}(\lambda)=\frac{1}{\lambda\pm i(k+m+1)}$, $k\in N$, а неизвестные коэффициенты α_0 , $\alpha_k^{\pm}$, $k=\overline{1,n}$ определяются из системы

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_0 a_{00}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^+ a_{k0}^+ +\alpha_k^- b_{k0}^+)=h_0\\ \alpha_0 a_{0j}^+ +\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^+ a_{kj}^+ +\alpha_k^- b_{kj}^+)=h_j^+\\ \alpha_0 a_{0j}^- +\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^+ a_{kj}^- +\alpha_k^- b_{kj}^-)=h_j^-\\ \qquad j=\overline{1,\ n},\end{array}\right.$$

а $a_{00} = \left(\sum_{p=-m}^{m} A_p \ , \ \varphi_0 \right)$, $a_{0j}^{\pm} = \left(\sum_{p=-m}^{m} A_p \ , \ \varphi_j^{\pm} \right)$, $a_{k0}^{+} = \left(\sum_{p=-m}^{m} A_p \varphi_{k-p}^{+} \ , \ \varphi_0 \right)$,

$$a_{kj}^{\pm} = \left(\sum_{p=-m}^{m} A_p \varphi_{k-p}^{+} \ , \ \varphi_j^{\pm} \right),\ b_{k0}^{-} = \left(\sum_{p=-m}^{m} A_p \varphi_{k-p}^{-} \ , \ \varphi_0 \right),\ b_{kj}^{\pm} = \left(\sum_{p=-m}^{m} A_p \varphi_{k-p}^{-} \ , \ \varphi_j^{\pm} \right),$$

$$h_j^{\pm} = \left(H, \varphi_j^{\pm} \right),\ h_0 = \left(H, \varphi_0 \right)\ k = \overline{1, n}\ ,\ j = \overline{1, n}.$$

В подразделе 3.1. некоторые классы дифференциальных уравнений сведены к многоэлементной ЗК. Так, например, линейное неоднородное дифференциальное уравнение n–го порядка с полиномиальными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n} t^k \sum_{m=-l}^{l} \alpha_{k,m} t^m y^{(k)}(t) = h(t), \qquad t \geq 0\ , \qquad \alpha_{k,m} \in C, \qquad k = \overline{0,n}, \qquad m = \overline{-l,l}\ , \qquad 1 \leq n < \infty$$

сведено к многоэлементной ЗК для полосы $-l < \operatorname{Im} z < l$ заменой $t = e^{\alpha}$ и с применением преобразования Фурье по новым переменным:

$$\sum_{m=-l}^{l} A_m(x) F(x - mi) = \sum_{m=-l}^{l} G(x - mi).$$

Аналогичный результат одержан и для линейного неоднородного дифференциального уравнения n–го порядка с экспоненциальными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{m=-l}^{l} \alpha_{k,m} e^{-mx} f^{(k)}(x) = h(x), \qquad x \in R\ .$$

Решение дифференциальных уравнений в частных производных в плоскости с прямолинейными разрезами представляет большие математические трудности. Изучению этого класса посвящен параграф 3.2.. Дифференциальное уравнение в частных производных с определёнными условиями на разрезах сводится к дифференциально-разностному уравнению:

$$\sum_{p=0}^{A} \sum_{q=0}^{B} a_{pq}(y) \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+p/2-j}(y)}{dy^q} = g_n(y)\ , \quad y \in R, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ , \tag{4}$$

где А, В целые положительные числа, $A + B$ - порядок дифференциально-разностного уравнения, $a_{pq}(y), g_n(y)$ -заданные функции, $u_n(y)$ - искомая функция. Условия на прямолинейных разрезах такие:

$$c_{rs}\left\{\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\left[a_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j\frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s+0)}{dy^q}+\beta_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j\frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s-0)}{dy^q}\right]-g_{nrs}\right\}+$$

$$+a_{rs}R^n\left\{\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\left[\gamma_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j\frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s+0)}{dy^q}+\delta_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j\frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s-0)}{dy^q}\right]-g_{nrs}\right\}+ \qquad (5)$$

$$+b_{rs}R^{-n}\left\{\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\left[\mu_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j\frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s+0)}{dy^q}+\nu_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j\frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s-0)}{dy^q}\right]-g_{nrs}\right\}=0,$$

$$n=0,\pm1,\pm2,...,$$

где $r=\overline{1,m_s}$ - количество условий на границе s, $s=\overline{1,N}$, последовательности g_{nrs} - заданы в l_2, а $a_{rs}, b_{rs}, c_{rs}, \alpha_{pqrs}, \beta_{pqrs}, \gamma_{pqrs}, \delta_{pqrs}, \mu_{pqrs}, \nu_{pqrs}$, - заданные числа, $0<R<1$.

Предложено решение задачи (4)-(5) методом сведения её к матричной ЗК в кольце относительно функций $C_{ks}(t)$:

$$\sum_{k=1}^{B}\left[P_{rsk}(Rt)C_{ks}(Rt)+\mathrm{M}_{rsk}(R^{-1}t)C_{ks}(R^{-1}t)+\mathrm{T}_{rsk}(t)C_{ks}(t)\right]=\mathrm{W_{rs}(t)}\ ,\ |\mathrm{t}|=1\ ,$$

где $s=\overline{1,N}$ - количество границ, $r=\overline{1,m_s}$ - количество условий на границе s, $P_{rsk}(z)$, $M_{rsk}(z)$, $T_{rsk}(z)$, $W_{rs}(z)$ -известные функции $R^{-1}<|z|<R$, , $0<R<1$, $C_{rs}(z)$ - неизвестные функции в этом же кольце.

Четвертый раздел состоит из трёх подразделов. В 4.1. рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение с полиномиальными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n}t^k\left(\alpha_k t^{-1}+\beta_k\right)y^{(k)}(t)=0,\qquad t\ \geq 0\ , \qquad (6)$$

где $\alpha_k\in R, \beta_k\in R$, $k=\overline{0,n}$, $\alpha_n\neq 0, \beta_n\neq 0$, $y(x)$ – неизвестная функция, принадлежащая пространству обобщенных функций.

Теорема 4.1. *Пусть* $\alpha_k\in R$, $\beta_k\in R$, $k=\overline{0,n}$ *такие, что 1)* $\operatorname{sgn}\alpha_\mathrm{n}=-\operatorname{sgn}\beta_\mathrm{n}$,

2) $A(\mathrm{x})\neq 0$, *где* $A(x)=\dfrac{x^n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{x^k b_k}{b_n}}{x^n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{x^k a_k}{a_n}}$, $a_k=(-i)^k\sum\limits_{j=k}^{n}c_jC_j^k$, $b_k=(-i)^k d_k$,

$k=\overline{0,n}$, $c_0=\alpha_0$, $c_k=\sum\limits_{\mathrm{j=k}}^{\mathrm{n}}\alpha_\mathrm{j}\,\mathrm{s_k^j}$, $k=\overline{1,n}$, $d_0=\beta_0$, $d_k=\sum\limits_{j=k}^{n}\beta_j\,s_k^j$, $k=\overline{1,n}$,

а s_j^k *- коэффициенты, однозначно определяемые через коэффициенты уравнения (6).*

3) $\dfrac{\beta_{n-1}}{\beta_n} - \dfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = C_n^{n-1}$. *Тогда частное решение уравнения (6) определяется формулой*

$$y(t) = C\,\delta\left(t + \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) + C\,\varphi\left[\ln\left(-\frac{\beta_n}{\alpha_n}t\right)\right],$$ *где* $\varphi(x) = (V^{-1}\Phi(x))(x)$, $\Phi(x) = X(x)-1$, C *– постоянная,*

$$X(x) = \exp\left(-\frac{\ln A(x)}{2} - \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln A(t)}{th\,\pi(x-t)}dt\right)$$

В некоторых случаях частное решение дифференциального уравнения (6) можно найти в явном виде. Имеет место следующая

Теорема 4.2. *Пусть коэффициенты* $\alpha_k \in R$, $\beta_k \in R$, $k = \overline{0,n}$ *линейного однородного дифференциального уравнения (6) чётного порядка таковы, что*

1) $\operatorname{sgn}\alpha_n = -\operatorname{sgn}\beta_n$, *2)* $A(x) \neq 0$, *3)* $\dfrac{\beta_{n-1}}{\beta_n} - \dfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = C_n^{n-1}$

и корни числителя $x_1^{(j)}$ *и знаменателя* $x_2^{(j)}$ *дробно-рациональной функции* $A(x)$ *таковы, что:*

4) $\operatorname{Re} x_1^{(j)} = \operatorname{Re} x_2^{(j)}$, $j = \overline{1,n}$, *5)* $\operatorname{Im} x_1^{(j)} = \operatorname{Im} x_2^{(j)} - 1$, $\operatorname{Im} x_1^{(j+1)} - 1 = \operatorname{Im} x_2^{(j+1)}$, $j = 1,3,5,\ldots,n-1$.

Тогда частное решение уравнения (4) определяется формулой

$$y(t) = C\,\delta\left(t + \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) + C\,i\sum_{k=1}^{n/2} y_k(t),\quad t \geq 0,$$ *где* C *-постоянная ,* $\delta(x)$ *- дельта функция,*

$$y_k(t) = \begin{cases} \mathrm{B_k}\,\operatorname{sgn}\left(\operatorname{Im}\left(z_2^{(k)}\right)\right) t^{-i z_2^{(k)}} \left(-\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^{i z_2^{(k)}} \eta\left(t + \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right), & \operatorname{Im}\left(z_2^{(k)}\right) \neq 0 \\ -\mathrm{B_k}\,\operatorname{sgn}\left(t + \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right) & \operatorname{Im}\left(z_2^{(k)}\right) = 0 \end{cases},$$

$z_2^{(k)} = \operatorname{Re} x_2^{(2k-1)} + i\,\operatorname{Im} x_1^{(2k)}$, $k = \overline{1,n/2}$, $\eta(t)$ *- единичная функция Хевисайда.*

Получено в квадратурах также решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $\sum_{k=0}^{n} t^k\left(\alpha_k t^{-1} + \beta_k\right)y^{(k)}(t) = h(t)$, $t \geq 0$, де $\alpha_k \in R$, $\beta_k \in R$, $k = \overline{0,n}$, $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

Аналогичные исследования проведены и для линейных дифференциальных уравнений (как однородных, так и неоднородных) вида

$$\sum_{k=0}^{n} t^k\left(\alpha_k t^{-1} + \beta_k t\right)y^{(k)}(t) = h(t),\qquad t \geq 0,$$ где $\alpha_k \in R$, $\beta_k \in R$, $k = \overline{0,n}$, $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\alpha_k e^{-x} + \beta_k\right)y^{(k)}(x) = g(x),\quad -\infty < x < +\infty ,$$ где $\alpha_k \in R$, $\beta_k \in R$, $k = \overline{0,n}$, $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\alpha_k e^{-x} + \beta_k e^{x}\right)y^{(k)}(x) = g(x),\quad -\infty < x < +\infty ,$$ где $\alpha_k \in R$, $\beta_k \in R$, $k = \overline{0,n}$, $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

В подразделе 4.2 рассмотрено однородное дифференциальное уравнение с осциллирующими коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\alpha_k e^{i\gamma\gamma}+\beta_k e^{-i\gamma\gamma}\right)y^{(k)}(x)=0,\qquad x\in R, \tag{7}$$

где $\alpha_k,\beta_k\in C, k=\overline{0,n},\ \gamma\in \mathrm{R},\ \gamma>0$. Неизвестную функцию $y(x)$ ищем в пространстве обобщенных функций. Воспользовавшись преобразованием Фурье и введя замену $s=x-\gamma$, $\mathrm{s}\in \mathrm{R}$, сведём (5) к функциональному уравнению

$$Y(s+2\gamma)=C(s)Y(s),\quad \mathrm{s}\in \mathrm{R}, \tag{8}$$

где $C(s)=-\dfrac{B(s+\gamma)}{A(s+\gamma)}$, $A(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(-i(x+\gamma))^k$, $B(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k(-i(x-\gamma))^k$.

Для исследования функционального уравнения вводим функцию сдвига $a(s)=s+2\gamma$. Сдвиг $a(s):R\to R$ есть гомеоморфизм, который сохраняет ориентацию действительной оси и имеет неподвижные точки $-\infty,\ \ +\infty$.

Теорема 4.13. *Пусть* $A(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(-i(x+\gamma))^k$, $B(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k(-i(x-\gamma))^k$,

где $\alpha_k,\beta_k\in C,\ k=\overline{0,n},\quad \gamma\in\mathrm{R},\ \gamma>0$ *- коэффициенты однородного дифференциального уравнения (7). Тогда, если: 1) функции* $A(x)$, $B(x)$ *не имеют действительных корней и*

$\dfrac{\sum_{k=0}^{n}\beta_k(-i)^k s^k}{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(-i)^k(s+2\gamma)^k}\equiv 1,\quad \forall s\in R$, *то решение уравнения (7) получается обратным преобразованием Фурье функции* $Y(s)=C, s\in R$, C*- постоянная. Очевидно, что в этом случае решение -* $y(x)=C\sqrt{2\pi}\delta(x)$ *; 2) функции* $A(x)$, $B(x)$ *не имеют действительных корней и выполняются условия:* $\alpha_n=-\beta_n$, $(-i)^{n-1}(\beta_{n-1}+\alpha_{n-1}-iC_n^1 2\gamma\alpha_n)=0$, *то решение уравнения (7) получается обратным преобразованием Фурье функции*

$$Y(s)=\begin{cases} P^{-\infty}(s) & ,\quad \mathrm{s}\in[-\infty,\mathrm{s}_*] \\ \dfrac{C}{P^{+\infty}(s)} & ,\quad \mathrm{s}\notin[-\infty,\mathrm{s}_*]\end{cases}$$, *где* s_* *- произвольная точка из* $(-\infty,+\infty)$,

$C=P^{-\infty}(s)P^{+\infty}(s)$ *- постоянная,* $P^{+\infty}(s)=\prod_{l=0}^{+\infty}C(s+2\gamma l)$, $P^{-\infty}(s)=\prod_{l=1}^{+\infty}C(s-2\gamma l)$.

Другие теоремы подраздела 4.2. имеют аналогичный характер. В них изучены наличие нулей функций $A(x)$ и $B(x)$ на действительной оси.

В подразделе 4.3., рассмотрен пример, в котором на основе приближенного решения трехэлементной ЗК для полосы найдено приближенное решение конкретного дифференциального уравнения с полиномиальными коэффициентами.

В пятом разделе рассмотрена задача о нахождении прогиба $u(\alpha,\beta)$ упругой тонкой плиты луночной формы, изгибаемой поперечной нагрузкой при условии что, один край лунки жестко закреплен, второй – свободно опертый.

Математическая постановка задачи состоит в решении бигармонического уравнения

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right]\left(\frac{u}{h}\right) = qh^3 ,$$

с граничными условиями :

$$\left.\frac{u(\alpha,\beta)}{h(\alpha,\beta)}\right|_{\beta=0} = \left.\frac{\partial(\mathrm{u/h})}{\partial\beta}\right|_{\beta=0}=0,\quad \left.\frac{u(\alpha,\beta)}{h(\alpha,\beta)}\right|_{\beta=\gamma}=0,\quad \left.\left((ch\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2(u/h)}{\partial\beta^2}+2\sin\beta\frac{\partial(u/h)}{\partial\beta}-\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{R}}\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial\rho}\right)\right|_{\beta=\gamma}=0,$$

где $R=\dfrac{a}{|\sin\gamma|}$ - радиус дуги, $\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\mathrm{u}}{\partial\mathrm{x}}x+(\mathrm{y}-\mathrm{C_o})\dfrac{\partial\mathrm{u}}{\partial\mathrm{y}}\right)$.

Задача сводится к пятиэлементной ЗК для полосы

$$\Psi(\lambda+2i)+\mathrm{B}_1(\lambda+\mathrm{i})\Psi(\lambda+\mathrm{i})+\mathrm{B}_2(\lambda)\Psi(\lambda)+\mathrm{B}_3(\lambda-\mathrm{i})\Psi(\lambda-\mathrm{i})+\Psi(\lambda-2i)=H(\lambda) .$$

Доказано, что она является нётеровой, безусловно разрешимой и имеет единственное решение в пространстве $L_2(R)$.

Поскольку вопрос о точном решении этой задачи остаётся открытым, то рассматривается вопрос о приближенном решении, которое ищется в виде:

$$\Psi_n(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}[\alpha_\mathrm{k}^+\varphi_\mathrm{k}^+(\lambda)+\alpha_\mathrm{k}^-\varphi_\mathrm{k}^-(\lambda)] ,$$

где $\alpha_k^\pm$, $\mathrm{k}=\overline{1,\mathrm{n}}$ – неизвестные коэффициенты, которые являются решением системы уравнений, построенной по методу Бубнова-Галёркина.

В приложениях рассмотрен класс бесконечных систем плавного перехода, которая сводится к ЗК в кольце

$$\begin{cases}(\alpha_1R^{-n}+\beta_1R^n+\gamma_1)\sum\limits_{\mathrm{k}=-\infty}^{+\infty}\mathrm{a}_{\mathrm{n-k}}u_k+(\alpha_2R^{-n}+\beta_2R^n+\gamma_2)\sum\limits_{\mathrm{k}=-\infty}^{+\infty}\mathrm{b}_{\mathrm{n-k}}v_k=\mathrm{g}_{1\mathrm{n}}\\(\alpha_3R^{-n}+\beta_3R^n+\gamma_3)\sum\limits_{\mathrm{k}=-\infty}^{+\infty}\mathrm{c}_{\mathrm{n-k}}u_k+(\alpha_4R^{-n}+\beta_4R^n+\gamma_4)\sum\limits_{\mathrm{k}=-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}_{\mathrm{n-k}}v_k=\mathrm{g}_{2\mathrm{n}},\\\mathrm{n}=0,\pm1,\pm2,\dots,\end{cases}$$

где коэффициенты a_n, b_n, c_n, d_n принадлежат пространству l_1, а последовательности g_{1n}, g_{2n} - из пространства l_2, $|R|<1$, а α_i, β_i, γ_i $i=\overline{1,4}$ - заданные постоянные, одновременно отличные от нуля. Последовательности $\{u_k\}, \{v_k\}$ ищутся в пространстве l_2 .

Применяем прямое преобразование Лорана и, используя Теорему (о свертке), получим матричную задачу в кольце:

$$\begin{cases} A(t)[\alpha_1 U(R^{-1}t) + \beta_1 U(Rt) + \gamma_1 U(t)] + B(t)[\alpha_2 V(R^{-1}t) + \beta_2 V(Rt) + \gamma_2 V(t)] = G_1(t) \\ C(t)[\alpha_3 U(R^{-1}t) + \beta_3 U(Rt) + \gamma_3 U(t)] + D(t)[\alpha_4 V(R^{-1}t) + \beta_4 V(Rt) + \gamma_4 V(t)] = G_2(t), \end{cases} \qquad |t|=1$$

причем функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ отличны от нуля.

ВЫВОДЫ

На основе исследований, проведенных в диссертации, получены следующие основные результаты:

1. Существенно расширена теория задачи Карлемана для полосы и кольца. В частности:

а) впервые получено точное решение ЗК в кольце для двух пар функций в частном случае;

б) доказано существование и единственность решения ЗК в кольце с радиальным сдвигом во внутрь области в симметричном случае;

в) обоснован аналитический метод приближенного решения многоэлементной ЗК в кольце и в полосе.

2. В рамках развития теории задачи Карлемана получены теоретические обобщения и новые решения научных проблем, которые связаны с решением класса линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными и экспоненциальными коэффициентами. В частных случаях получены точные решения уравнений указанных типов. В более общих случаях предложен аналитический метод приближенного решения линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными и экспоненциальными коэффициентами.

3. Предложено с обоснованием алгоритм построения приближенного решения одной задачи упругости, которая известными методами решению не поддаётся.

4. Реализован новый подход аналитического решения линейных дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами.

5. Описан класс бесконечных систем плавного перехода, которые сводятся к ЗК в кольце. В частных случаях получено точное решение этих систем.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАНЫХ РАБОТ

[1]. Хачатуров С.Ю. О существовании решения задачи Карлемана для кольца // “ Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики и их приложения”. Сб. научных трудов Института математики НАН Украины. Киев, 1997. - С. 214-217.

[2]. Керекеша П.В., Хачатуров С.Ю. Задача Карлемана в кольце для двух пар функций // Укр. мат. журн. - 1997. – Т. 49, № 5. - С. 662-671.

[3]. Керекеша П.В., Хачатуров С.Ю. Смешанная задача о прогибе тонкой упругой плиты луночной формы // Прикл. механика. - 1998. – Т. 34, №1. - С. 85-91.

[4]. Керекеша Д.П., Хачатуров С.Ю. Об одном линейном однородном дифференциальном уравнении с осциллирующими коэффициентами // Одесс. гос. ун-т. - Одесса, 1997. – 19 с. – Рус. - Деп. в ГНТБ Украины 23.12.97, № 535 -Ук97.

[5]. Керекеша П.В., Хачатуров С.Ю. Приближенное решение пятиэлементной задачи Карлемана, для полосы с аналитическим сдвигом во внутрь области с приложением // Тезисы докладов Междунар. конф. “Алгебра и анализ”. - Том 2. – Казань: КГУ. - 1994. - С. 70.

[6]. Хачатуров С.Ю. О решении линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка с экспоненциальными коэффициентами // Тезисы докладов на Воронежской весенней математической школе “Понтрягинские чтения -XI”. – Воронеж: ВГУ. - 2000. - С. 149.

[7]. Хачатуров С.Ю. О решении линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с полиномиальными коэффициентами // Тези доп. Міжнар. конф. “Диференціальні та інтегральні рівняння”. – Одесса: ОГУ. - 2000. - С. 284.

Хачатуров С. Ю. Многоелементна задача Карлемана та її застосування до диференциальних ривнянь. - Рукопис.

Дисертация на здобуття наукового ступеня кандидата физико-математичних наук за фахом 01.01.02 - диференциальни ривняння. - Одеський национальний университет им. И.И. Мечникова, Одеса, 2001.

Дисертация присвячена розвитку методу спряження аналитичних функций з метою застосування його для конструктивної побудови розв'язкив деяких класив диференциальних ривнянь

Показано, що линийни диференциальни ривняння n-го порядку з полиномиальними та експоненциальними коефицієнтами специальної структури зводяться до многоелементної задачи Карлемана у смузи, а диференциально-ризницеви ривняння – до матричної задачи Карлемана у кильци.

Для розв'язання задачи Карлемана застосовуються результати досліджень Черського Ю.Й. , Керекеши П.В., Тихоненка М.Я., а також результати, що отримани в дисертацийний роботи Це дозволило одержати низку нових результатив з теориї линийних диференциальних ривнянь.

Зокрема, видилени класи диференциальних ривнянь n-го порядку, розв'язки яких побудовани в явному вигляди. Для деяких класив линийних диференциальних ривнянь з полиномиальними та експоненциальними коефициєнтами одержано їх точний розв'язок. В загальному випадку для цього типу ривнянь запропоновано алгоритм наближеного розв'язання, який базується на методи Бубнова-Гальоркина.

Отримано розв'язок одного типу линийних диференциальних ривнянь з осцилюючими коефициєнтами. Крим цього, розглянуто систему двох нескинчених систем "плавного переходу", яка зводиться до задачи Карлемана для двох пар функций. В окремому випадку будується точний розв'язок згаданої системи.

Ключови слова: задача Карлемана, факторизация, кильце, смуга, диференциальни ривняння , перетворення Фур'є

Khachaturov S.Yu. Multi-element Carleman's problem and its application to the differential equations. – Manuscript

The thesis for the degree of the Candidate of physical and mathematical sciences on speciality 01.01.02 – Differential equations. – The I.I. Mechnikov Odessa National University, Odessa, 2001.

The thesis is devoted to development of the analytic-function conjugation method so as to apply it to the constructive construction of solution for classes of differential equations. It has been shown that the n-th order linear differential equations with polynomial and exponential special-structure coefficients are reduced to the multi-element Carleman's problem within the band, and the differentially-defference equations – to the Carleman's matrix problem in the ring. For Carleman's problem solving, the results of Yu.I. Chersky, P.V.Kerekesha, N.Ya. Tikhonenko's studies have been used, as well as the results obtained in the thesis. It allows to obtain a number of new results from the theory of linear differential equations. Particulary, the classes of the n-th order differential equations have been located, the solutions of which are constructed in the obvious form. For some classes of the linear differential equations with polinomial and exponential coefficients, their precise solutions has been obtained. In the general case the algorithm of the algorithm of the approximated solution has been offered for this type of the equations which is based on the Bubnov-Galyorkin method. The solution of one type of the linear differential equations with oscillating coefficients has been obtained. Moreover, the system comprised of 2 infinite systems with "smooth transition" has been considered. It is reduced to the Carleman's problem for 2 pairs of functions. In some specific case a precise solution of the system mentioned above is to be constructed.

Key words: Carleman's problem, factorisation, a ring, a band, a differential equation, a multi-element problem.

Хачатуров С.Ю. Многоэлементная задача Карлемана и ее применение к дифференциальным уравнениям. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, Одесса, 2001.

Диссертация посвящена развитию метода сопряжения аналитических функций с целью применения его к конструктивному построению решений некоторых классов дифференциальных уравнений.

Показано, что линейные дифференциальные уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} t^k \sum_{m=-l}^{l} \alpha_{k,m} t^m y^{(k)}(t) = h(t), \qquad t \geq 0$$

и $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=-l}^{l} \alpha_{k,m} e^{-mx} f^{(k)}(x) = h(x), \quad x \in R, \quad \alpha_{k,m} \in C, \quad k = \overline{0,n}, \quad m = \overline{-l,l}\ , \quad 1 \leq n < \infty$

сводятся к задаче сопряжения аналитических функций – к многоэлементной ЗК для полосы

$$\sum_{p=-m}^{m} A_p(\lambda)\Phi(\lambda + pi) = H(\lambda),$$

где $A_p(\lambda)$, $p = \overline{-m, m}$ непрерывные на $0X$ функции, $H(\lambda) \in L_2(R)$ - заданная функция, $\Phi(z)$ - искомая в полосе $-m < \operatorname{Im} z < m$ функция, а дифференциально-разностное уравнение

$$\sum_{p=0}^{A}\sum_{q=0}^{B} a_{pq} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+p/2-j}(y)}{dy^q} = g_n(y)\ , \quad y \in R, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ ,$$

(где А, В целые положительные числа, $A + B$ - порядок диференциально-разностного уравнения, $a_{pq}(y), g_n(y)$ -заданные функции, $u_n(y)$ - искомая функция) с заданными специальными условиями на прямолинейных разрезах сводится к матричной задаче Карлемана в кольце

$$\sum_{k=1}^{B}\left[P_{rsk}(Rt)C_{ks}(Rt) + M_{rsk}(R^{-1}t)C_{ks}(R^{-1}t) + T_{rsk}(t)C_{ks}(t)\right] = W_{rs}(t)\ , \ |t| = 1\ ,$$

где $s = \overline{1, N}$ - количество границ, $r = \overline{1, m_s}$ - количество условий на границе s, $P_{rsk}(z)$, $M_{rsk}(z)$, $T_{rsk}(z)$, $W_{rs}(z)$ - известные функции в кольце $R^{-1} < |z| < R$, , $0 < R < 1$, $C_{rs}(z)$ - неизвестные функции в этом же кольце.

Для решения указанных задач Карлемана и соответствующих им дифференциальных уравнений используются результаты Черского Ю.И., Керекеши П.В., Тихоненко Н.Я. и результаты, полученные в диссертационной работе. В частности: 1) получено точное решение задачи Карлемана в кольце для двух пар функций как в случае нулевого индекса, так и в более общем случае;

2) доказано существование и единственность решения задачи Карлемана в кольце вида

$$A(t)\Phi(Rt) + B(t)\Phi(R^{-1}t) + C(t)\Phi(t) = G(t), \qquad |t| = 1,$$

(где $A(t), B(t), C(t), |t|=1$ - известные функции из пространства Винера W, $G(t)$, $|t|=1$ -известная функция из $L_2(|t|=1)$, а $\Phi(z)$ - неизвестная аналитическая функция в кольце $R^{-1}<|z|<R$, $1<R<\infty$; 3) выделены классы линейных однородных дифференциальных уравнений n-го порядка, которые при помощи теории задачи Карлемана в полосе решены в явном виде; 4) разработан аналитический метод приближенного решения многоэлементной задачи Карлемана в полосе и матричной задачи Карлемана в кольце; 5) предложен новый подход к решению линейных однородных дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами вида

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\alpha_k e^{i\gamma x}+\beta_k e^{-i\gamma x}\right)y^{(k)}(x)=0, \qquad x \in R .$$

Благодаря ему получены условия существования решения и построены конструктивно эти решения; 6) построено с обоснованием аналитическое приближенное решение пятиэлементной задачи, связанной с решением одной задачи теории упругости, которая известными методами не поддавалась решению; 7) изучены системы двух бесконечных систем "плавного перехода", в отдельных случаях получены их точные решения.

Ключевые слова: задача Карлемана, факторизация, кольцо, полоса, дифференциальное уравнение, преобразование Фурье.