Міністерство освіти і науки України
Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова

Хачатуров Сергій Юрійович

УДК 517. 926

Многоелементна задача Карлемана та її застосування до диференціальних рівнянь

01.01.02 – диференціальні рівняння

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Одеса – 2001

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі вищої математики Одеського національного університету ім. І.І. Мечникова Міністерства освіти і науки України

Науковий керівник Доктор фізико-математичних наук, доцент **Керекеша Петро Володимирович,** Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова, професор кафедри вищої математики

Офіційні опоненти: Доктор фізико-математичних наук, професор **Тихоненко Микола Якович**, Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова, завідувач кафедри математичного забезпечення комп'ютерних систем;

Кандидат фізико-математичних наук, доцент **Бігун Ярослав Йосипович**, Чернівецький національний університет ім. Федьковича, завідувач кафедри прикладної математики і механіки.

Провідна установа: **Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна** Міністерства освіти і науки України, кафедра обчислювальної математики та математичної фізики, м. Харків

Захист відбудеться "2" березня 2001 року о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради № К.41.051.05 при Одеському національному університеті ім. І.І. Мечникова (65026, м. Одеса, вул. Дворянська, 2)

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Одеського національного університету ім. І.І. Мечникова (65026, м. Одеса, вул. Преображенська, 24)

Автореферат розісланий "26" січня 2001 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Вітюк О.Н.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. При дослідженні прикладних задач, зокрема, задач моделювання та прогнозування фізичних явищ, використовуються в якості математичних моделей звичайні диференціальні рівняння, рівняння в частинних похідних і диференціально-різницеві рівняння.

При розв'язанні вказаних диференціальних рівнянь використовують різні методи. Одним із нових та перспективних є комбінований метод інтегральних перетворень і спряження аналітичних функцій. Цей метод містить в собі конструктивну міць інтегральних перетворень та стрункість теорії функцій комплексного змінного.

Термін "спряження" був введений відомим математиком і механіком М.І. Мусхелішвілі. Метод розв'язування крайових задач за допомогою спряження аналітичних функцій називається методом спряження. При цьому спряження здійснюється лінійним способом і через межу області. Таке спряження ще називають задачею Рімана.

Другою задачею спряження є задача Карлемана (далі ЗК), але тільки спряження аналітичних функцій здійснюється більш складним шляхом.

Граничну задачу, яка носить його ім'я, Т. Карлеман поставив в 1932 році на II конгресі математиків (м. Цюріх).

Теорія ЗК та її узагальнення викладені в монографії Г.С. Літвінчука. (Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.) Там же наводиться обширна бібліографія по ЗК. Наведені в ній дослідження в основному мають якісний характер. І тільки при виході у світ роботи Ю.Й. Черського (Черский Ю.Й. Нормально-разрешенное уравнение плавного перехода // ДАН СССР. – 1970. – 190, № 1. – С. 57-60.) дослідження по ЗК одержали конструктивний характер.

Починаючи з 80-х років XX століття за допомогою ЗК для смуги були одержані розв'язки задач математичної фізики, раніш "недоступних" існуючими методами. Тут слід відзначити роботи Банцурі Р.Д., Дащенко О.Ф., Керекеши П.В., Тихоненка Л.Я., Попова Г.Я., Нуллера В.М.

У 1974 році Ю.Й. Черський вперше показав, що лінійні диференціальні рівняння (далі ЛДР) із поліноміальними коефіцієнтами спеціального вигляду за допомогою інтегрального перетворення зводяться до ЗК для смуги. Цю задачу він розв'язав в квадратурах і тим самим вказав метод точного розв'язання розглянутого класу ЛДР.

Науковий інтерес до аналітичних розв'язків ЛДР існував і буде існувати. Це пов'язано з тим, що аналітичні розв'язки дають змогу більш адекватно дослідити реальні явища, які моделюються відповідними диференціальними рівняннями. У відомому довіднику Камке Е. наводяться приклади точних розв'язків ЛОДР із поліноміальними коефіцієнтами від другого до четвертого порядків включно. Але в наведених прикладах не видно єдиного методу їх розв'язування. Щодо методу, який базується на дослідженні ЗК для смуги, то він в значній мірі є універсальним. Він дозволяє дослідити ЛДР із поліноміальними коефіцієнтами в загальному випадку. Але при цьому треба проводити дослідження многоелементної ЗК для смуги. Більш того, існує клас ЛДР з експоненціальними коефіцієнтами та клас крайових задач математичної фізики, які також за допомогою інтегрального перетворення Фур'є зводяться до многоелементної ЗК для смуги. Тому дослідження многоелементної ЗК для смуги є актуальним як для розвитку теорії ЗК для смуги, так і для застосування теорії ЗК при розв'язуванні нових класів диференціальних рівнянь.

В останні роки, крім ЗК для смуги досліджується і ЗК в кільці. Наукових праць, присвячених дослідженню ЗК в кільці дуже мало.

Конструктивними розв'язками ЗК в кільці займався Зверович Е.І., Керекеша П.В. і Черський Ю.Й., а розробкою аналітичних наближених методів для розв'язання ЗК в кільці – М.Я. Тихоненко. Інших робіт в цьому напрямку нам не відомо. . У зв'язку з цим актуальною є проблема розвитку теорії ЗК в кільці.

ЛДР з осцилюючими коефіцієнтами теж є предметом дослідження в дисертації. Вивчення таких рівнянь активно відбувається в останні роки. Тому дослідження ЛДР вказаного типу також актуальна проблема. Крім цього метод дослідження відрізняється від відомих. Він базується на дослідженні функціонального рівняння зі зсувом на дійсній вісі.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках бюджетних науково-дослідних тем, які розроблялись в Інституті математики, економіки та механіки при Одеському національному університеті ім. І.І. Мечникова згідно з Координаційним планом наукових досліджень Міністерства освіти і науки України, а також в рамках виконання теми 1.153 ДК України.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є побудова розв'язків (точних і наближених) деяких класів диференціальних рівнянь. Розглядаються лінійні звичайні диференціальні рівняння, диференціально-різницеві рівняння та диференціальні рівняння з частинними похідними, які зводяться до задач Карлемана для смуги та кільця. Метод дослідження полягає в побудові конструктивного розв'язку ЗК, а, отже, і розв'язку згаданих вище диференціальних рівнянь. При зведенні диференціальних рівнянь до ЗК використовується апарат перетворень Фур'є і Лорана.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному:

1) вперше отримано точний розв'язок ЗК у кільці для двох пар функцій в окремому випадку;
2) доведено існування та єдиність розв’язку ЗК у кільці;
3) отримано точний розв’язок одного класу лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку з поліноміальними та експоненціальними коефіцієнтами, а також диференціальних рівнянь з осцилюючими коефіцієнтами;
4) описано клас нескінченних систем алгебраїчних рівнянь плавного переходу, які зводяться до ЗК у кільці;

5) запропоновано аналітичний метод наближеного розв'язування многоелементної ЗК в кільці і смузі.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація має як теоретичне, так і практичне значення. Теоретична цінність роботи полягає в доведенні існування розв'язку трьохелементної ЗК в кільці і в конструктивній побудові розв'язку деяких класів диференціальних рівнянь. В тих випадках , коли не вдається побудувати точний розв'язок, запропоновано метод наближеного розв'язання трьохелементної ЗК в кільці та удосконалено метод наближеного розв'язання многоелементної ЗК у смузі.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що запропоновані методи можуть бути застосовані до розв'язання деяких задач математичної фізики (теорія пружності, теорія розповсюдження хвиль та інших).

Особистий внесок здобувача. Роботи [2,3,5] виконані у співавторстві з науковим керівником. В роботі [2] науковому керівникові належить постановка ЗК для двох пар функцій, метод її розв'язання у випадку нульового індексу та практичне застосування. Реалізація методу конструктивного розв'язання ЗК у випадку нульового індексу та дослідження більш загального випадку належить дисертанту. Реалізована також схема побудови двох нескінчених систем плавного переходу, яка запропонована науковим керівником. В роботі [3] науковому керівнику належать постановки задачі та метод її розв'язування, а також дослідження поведінки згинаючого моменту в кутових точках. Дослідження умов розв'язності задачі, побудова її наближеного розв'язку, дослідження його збіжності та чисельний експеримент належать дисертанту.

В роботі [5] науковому керівникові належать постановка задачі та метод її розв'язання. Дослідження умов існування та єдиності розв'язку належать дисертанту.

В роботі [4] співавтору належить зведення однорідного диференціального рівняння з осцилюючими коефіцієнтами до функціонального рівняння. Дослідження та побудова розв'язку функціонального рівняння належать здобувачу.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на Міжнародній науковій конференції "Алгебра і аналіз" (Казань, 1994); на IV Міжнародній конференції з механіки неоднорідних структур (Тернопіль, 1995); на V Міжнародній конференції ім. М. Кравчука (Київ, 1996); на Воронезькій весняній математичній школі "Понтрягінські читання -XI" "Сучасні методи в теорії крайових задач " (Воронеж, 2000); на Міжнародній конференції "Диференціальні і інтегральні рівняння» (Одеса, 2000); на науковому семінарі кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету ім. І.І. Мечникова (керівник семінару - проф. Попов Г.Я.); на науковому семінарі кафедри обчислювальної математики Одеського національного університету ім. І.І. Мечникова (керівник семінару - проф. Тихоненко М.Я.).

Публікації. За темою дисертації опубліковано сім робіт, дві з яких – у вітчизняних провідних фахових виданнях, одна – у збірнику наукових праць, три – у збірниках доповідей міжнародних конференцій, одну роботу депоновано.

Структура та об'єм роботи. Дисертаційна робота містить вступ, п'ять розділів, висновок та список використаних джерел з 70 найменувань. Об'єм роботи 129 сторінок машинопису.

ЗМІСТ РОБОТИ.

У вступі обгрунтовується актуальність теми дисертації, формулюється мета роботи, викладено основні результати.

Перший розділ присвячено огляду літератури за темою дисертації.

У другому розділі викладено метод розв'язування диференціальних рівнянь , які розглядаються в дисертації. Методика розв'язання цих рівнянь базується на розв'язанні ЗК з використанням перетворень Фур'є та Лорана.

В підрозділі 2.1 вивчаються питання існування розв'язку ЗК у кільці із радіальним зсувом усередину області:

$$A(t)\Phi(Rt) + B(t)\Phi(R^{-1}t) + C(t)\Phi(t) = G(t), \qquad |t| = 1, \qquad (1)$$

де $A(t), B(t), C(t), |t|=1$ - відомі функції, що належать просторові Вінера W ($A(t)\in W$, якщо $L^{-1}A(t) = a_n, a_n \in l_1$, L^{-1} - обернений оператор Лорана); $G(t)$, $|t|=1$ - відома функція із $L_2(|t|=1)$, а $\Phi(z)$ -невідома аналітична функція в кільці $R^{-1}<|z|<R$, $1<R<\infty$. Використовуючи заміну $t=e^{i\alpha}$ і інтегральне зображення аналітичної періодичної функції в смузі, яке отримане науковим керівником (Керекеша П.В. Интегральное представление аналитической периодической функции в полосе // Тр. респ. научно-методич. конф., посв. 200-летию со дня рождения Н.И. Лобачевского. – Одесса. – 1992. – С. 38-39), зводимо ЗК (1) до інтегрального рівняння

$$\varphi_0(\alpha) + D(\alpha)\frac{K'}{2\pi\ln R}\int_0^{2\pi} cs\frac{K'}{\ln R}(\alpha-\theta)\varphi_0(\theta)d\theta + E(\alpha)\frac{K'}{2\pi\ln R}\int_0^{2\pi} dn\frac{K'}{\ln R}(\alpha-\theta)\varphi_0(\theta)d\theta = H(\alpha),$$

$0\le\alpha\le 2\pi$,

де $dn\alpha$, $cs\alpha$- двоякоперіодичні функції Якобі, K і K' – дійсний і уявний четверть періоди, які зв'язані співвідношенням $\frac{K}{K'}=\frac{\pi}{\ln R}$, а $\varphi(t)\in L_2(|t|=1)$ - шукана функція, $\varphi_0(\alpha)=\varphi(e^{i\alpha})$,

$$D(\alpha)=\frac{2(A(e^{i\alpha})-B(e^{i\alpha}))}{A(e^{i\alpha})+B(e^{i\alpha})},\quad E(\alpha)=\frac{2C(e^{i\alpha})}{A(e^{i\alpha})+B(e^{i\alpha})},\quad H(\alpha)=\frac{2G(e^{i\alpha})}{A(e^{i\alpha})+B(e^{i\alpha})}.$$

У симетричному випадку ($A(t)\equiv B(t), |t|=1$) інтегральне рівняння буде мати вигляд:

$$\varphi_0(\alpha)=(S\varphi_0)(\alpha) = -E(\alpha)\frac{K'}{2\pi\ln R}\int_0^{2\pi} dn\frac{K'}{\ln R}(\alpha-\theta)\varphi_0(\theta)d\theta + H(\alpha),\ 0\le\alpha\le 2\pi,$$

де S – лінійний оператор, який діє з $L_2([0,2\pi])$ в $L_2([0,2\pi])$. Тоді, має місце наступна

Теорема 2.1. *Нехай опрератор S діє з* $L_2([0,2\pi])$ *в* $L_2([0,2\pi])$ *і нехай* $\gamma = \max\limits_{\alpha\in[0,2\pi]}\left|\dfrac{C(e^{i\alpha})}{A(e^{i\alpha})}\right|$. *Тоді ЗК (1), у класі* $L_2(\,|\,t\,|=1)$, *має єдиний розв'язок.*

У несиметричному випадку $A(t)\neq B(t), |\,t\,|=1$ ЗК (1) зводиться до повного особливого інтегрального рівняння з ядром Гільберта, яке за допомогою регуляризації зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду $\varphi_0(\alpha)+\int\limits_0^{2\pi}R(\alpha,\theta)\varphi_0(\theta)d\theta = f(\alpha), \quad 0\le\alpha\le 2\pi$,

де $f(\alpha)$ - відома функція, $R(\alpha,\theta)$ - фредгольмове ядро, $\varphi_0(\alpha)$ - шукана функція. Тепер питання існування розв'язку задачі (1) зводиться до питання існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.

ЗК у кільці для двох пар функцій, яка розглядається в підрозділі 2.2. , полягає в знаходженні двох пар аналітичних в кільці функцій Φ(z), Ψ(z), які задовольняють на межі кільця $R^{-1}<|\,t\,|<R,\ R>1$ наступні умови:

$$\begin{cases}\Phi(R^{-1}t)+A(t)\Psi(Rt)=G_1(t)\\ \Phi(Rt)+B(t)\Psi(R^{-1}t)=G_2(t)\end{cases},\quad |\,t\,|=1, \tag{2}$$

де задані функції $G_1(t)$, $G_2(t)$ належать $L_2(|\,t\,|=1)$, а відомі функції $A(t)$ і $B(t)$ відмінні від нуля на колі $|\,t\,|=1$ і належать просторові Вінера W.

Нехай $IndA(t)=\kappa_1$, $IndB(t)=\kappa_2$. Тоді факторизацію функцій $A(t)$, $B(t)$ проводимо таким чином:

$$A(t)=\lambda_0\left(\frac{R^{-1}t-a}{Rt-a}\right)^{\kappa_1}\frac{X_1(R^{-1}t)}{X_2(Rt)}\ ,\ B(t)=\mu_0\left(\frac{R^{-1}t-a}{Rt-a}\right)^{\kappa_2}\frac{X_1(Rt)}{X_2(R^{-1}t)}\ .$$

В частинному випадку ($\kappa=\kappa_1=-\kappa_2$) сталі λ_0,μ_0 можна визначити так:

$$\lambda_0=\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\ln\left[\left(\frac{R^{-1}\tau-a}{R\tau-a}\right)^{\kappa}A_0(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau}\right),\ \ \mu_0=\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\ln\left[\left(\frac{R\tau-a}{R^{-1}\tau-a}\right)^{\kappa}B_0(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau}\right).$$

Покладемо $\Delta'=\mu_0R^{-2n}-\lambda_0R^{2n}$. Тоді, якщо $\kappa=0$ і $\Delta'\neq 0$, то існує єдиний і безумовний розв'язок задачі (2):

$$\Phi(t)=\mu_0\,\frac{X_1(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)\tau}-\lambda_0\,\frac{X_1(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)\tau}\ ,$$

$$\Psi(t)=\frac{X_2(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)\tau}-\frac{X_2(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)\tau}\ ,$$

де функції $X_1(t), X_2(t)$ визначаються так:

$$X_1(t)=\exp\left\{C_1-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{\ln A_0(\tau)-\ln\lambda_0}{\tau}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{\ln B_0(\tau)-\ln\mu_0}{\tau}d\tau\right\},$$

$$X_2(t)=\exp\left\{C_2+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{\ln A_0(\tau)-\ln\lambda_0}{\tau}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{\ln B_0(\tau)-\ln\mu_0}{\tau}d\tau\right\},$$

а функції $H_1(t), H_2(t)$ - відомі.

Якщо $\Delta'=0$, то для розв'язності ЗК необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

$$\int_{|\tau|=1}\frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)\tau}=\int_{|\tau|=1}\frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)\tau}\ ,\ \bar{n}=0, \lambda_0=\mu_0,$$

$$\mu_0\int_{|\tau|=1}\frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)\tau^{\nu+1}}=\lambda_0R^{2\nu}\int_{|\tau|=1}\frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)\tau^{\nu+1}}\ ,\ \bar{n}=\nu, \nu\in Z\ ,$$

де $\bar{n}=\begin{cases}0 & , \qquad \lambda_0=\mu_0\\ \nu & , \ \nu=\dfrac{\ln\mu_0-\ln\lambda_0}{4\ln R} \quad \lambda_0\neq\mu_0,\ \nu\in Z.\end{cases}$

Якщо виконуються ці умови, то ЗК має розв'язок, який залежить від сталих C_1, C_2 :

$$\Phi(t)=X_1(t)\left[C_1t^{\bar{n}}+\frac{\mu_0}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\Omega_{\bar{n}}^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)\tau}-\frac{\lambda_0}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\Omega_{\bar{n}}^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)\tau}\right],$$

$$\Psi(t)=X_2(t)\left[C_2t^{\bar{n}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\Omega_{\bar{n}}^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\Omega_{\bar{n}}^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)\tau}\right].$$

Розглянемо також випадки, коли індекс к відмінний від нуля. При цьому у випадку $\kappa_1=-\kappa_2$ також отримано умови розв'язності ЗК (2) і побудовані відповідні розв'язки.

В підрозділі 2.3. розглядається ЗК:

$$A(t)\Phi(Rt)+B(t)\Phi(R^{-1}t)+C(t)\Phi(t)=G(t), \qquad |t|=1, \qquad (3)$$

де $A(t)=\dfrac{t+1}{2\sqrt{t}}, B(t)=i\dfrac{t-1}{2\sqrt{t}}, C(t)=\dfrac{t+1}{2\sqrt{t}}-i\dfrac{t-1}{2\sqrt{t}}$, $G(t)$ відома функція із простору $L_2(|t|=1)$, а $\Phi(z)$ - шукана аналітична в смузі $R^{-1}<|z|<R,\ 1<R<\infty$ функція. Використовуючи інтегральне зображення аналітичної функції у кільці, ЗК (3) можна звести до рівняння типу згортки з 2π-періодичним ядром та періодичним множником. Далі, розкладаючи функції Якобі $dn\alpha$, $cs\alpha$ в ряд та використовуючи властивості дискретного перетворення Фур'є, приходимо до різницевого рівняння $f_n=-\dfrac{\beta_4+\beta_2T_n}{\beta_3+\beta_1T_n}f_{n-1}+\beta_3\dfrac{\beta_4+\beta_2T_n}{\beta_3+\beta_1T_n}h_{0,n}-\beta_4h_{0,n}$, $\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots,$ яке в свою чергу розв'язуємо методом факторизації.

Точний розв'язок ЗК (1) вдається побудувати тільки в окремих випадках, тому виникає питання побудови її наближеного розв'язку з відповідними оцінками похибки.

В підрозділі 2.4. обгрунтовано метод наближеного розв'язання ЗК, який базується на використанні методу Бубнова-Гальоркіна.

Згідно методу Бубнова-Гальоркіна, $\Phi_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k t^k$ - наближений розв'язок ЗК у кільці, тобто:

$$\left\{ \sum_{k=-n}^{n} a_{km}\alpha_k = h_m, \qquad m=\overline{-n,n}, \right.$$

де $a_{km}=((\mathrm{A(t)}\,\mathrm{R}^{k}+\mathrm{B(t)}\,\mathrm{R}^{-k}+\mathrm{C(t)})\,\mathrm{t}^{k}\ ,\ \mathrm{t}^{m}\ )$, $h_m=(\ \mathrm{H(t)}\ ,\ \mathrm{t}^{m}\ )$, $|t|=1$, $k=\overline{-n,n}$.

Побудовано також наближений розв'язок многоелементної ЗК у смузі

$$\sum_{p=-m}^{m} A_p(\lambda)\Phi(\lambda+pi)=H(\lambda),$$

де $A_p(\lambda)$, $\mathrm{p}=\overline{-\mathrm{m},\mathrm{m}}$ неперервні на *0X* функції, $H(\lambda)\in L_2(R)$ - відома функція, а невідому функцію $\Phi(z)$ шукаємо в смузі $-m<\operatorname{Im} z<m$ в вигляді відрізку ряду Фур'є по ортонормованій системі функцій $\Phi_n(\lambda)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}[\,\alpha_{\mathrm{k}}^{+}\,\varphi_{\mathrm{k}}^{+}(\lambda)\,+\,\alpha_{\mathrm{k}}^{-}\,\varphi_{\mathrm{k}}^{-}(\lambda)\,]$, де $\varphi_0(\lambda)=1$, $\varphi_k^{\pm}(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda\pm i(k+m+1)}$, $k\in N$, а невідомі коефіцієнти α_0, $\alpha_{\mathrm{k}}^{\pm}$, $k=\overline{1,n}$ визначаються із системи

$$\begin{cases} \alpha_0 \mathrm{a}_{00} + \sum\limits_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} (\alpha_k^{+}\ \mathrm{a}_{\mathrm{k}0}^{+} + \alpha_k^{-}\ \mathrm{b}_{\mathrm{k}0}^{+}) = \mathrm{h}_0 \\ \alpha_0 \mathrm{a}_{0\mathrm{j}}^{+} + \sum\limits_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} (\alpha_k^{+}\ \mathrm{a}_{\mathrm{kj}}^{+} + \alpha_k^{-}\ \mathrm{b}_{\mathrm{kj}}^{+}) = \mathrm{h}_{\mathrm{j}}^{+} \\ \alpha_0 \mathrm{a}_{0\mathrm{j}}^{-} + \sum\limits_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} (\alpha_k^{+}\ \mathrm{a}_{\mathrm{kj}}^{-} + \alpha_k^{-}\ \mathrm{b}_{\mathrm{kj}}^{-}) = \mathrm{h}_{\mathrm{j}}^{-} \\ \qquad \mathrm{j}=\overline{1,\ \mathrm{n}}, \end{cases}$$

а $a_{00}=\left(\sum\limits_{\mathrm{p=-m}}^{\mathrm{m}}\mathrm{A_p}\ ,\ \varphi_0\right)$, $a_{0j}^{\pm}=\left(\sum\limits_{\mathrm{p=-m}}^{\mathrm{m}}\mathrm{A_p}\ ,\ \varphi_j^{\pm}\right)$, $a_{k0}^{+}=\left(\sum\limits_{\mathrm{p=-m}}^{\mathrm{m}}\mathrm{A_p}\varphi_{k-p}^{+}\ ,\ \varphi_0\right)$,

$a_{kj}^{\pm}=\left(\sum\limits_{\mathrm{p=-m}}^{\mathrm{m}}\mathrm{A_p}\varphi_{k-p}^{+}\ ,\ \varphi_{\mathrm{j}}^{\pm}\right)$, $b_{k0}^{-}=\left(\sum\limits_{\mathrm{p=-m}}^{\mathrm{m}}\mathrm{A_p}\varphi_{k-p}^{-}\ ,\ \varphi_0\right)$, $b_{kj}^{\pm}=\left(\sum\limits_{\mathrm{p=-m}}^{\mathrm{m}}\mathrm{A_p}\varphi_{k-p}^{-}\ ,\ \varphi_{\mathrm{j}}^{\pm}\right)$,

$h_j^{\pm}=\left(\mathrm{H},\varphi_{\mathrm{j}}^{\pm}\right)$, $h_0=\left(\mathrm{H},\varphi_0\right)$ $k=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$.

В підрозділі 3.1. деякі класи диференціальних рівнянь зведені до многоелементної ЗК. Так, наприклад, лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n–го порядку з поліноміальними коефіцієнтами

$$\sum_{k=0}^{n} t^k \sum_{m=-l}^{l} \alpha_{k,m} t^m y^{(k)}(t) = h(t), \qquad t \geq 0 \;, \qquad \alpha_{k,m} \in C, \qquad k = \overline{0,n}, \qquad \mathrm{m} = \overline{-l,l} \;, \qquad 1 \leq \mathrm{n} < \infty$$

зводимо до многоелементної ЗК для смуги $-l < \operatorname{Im} z < l$ заміною $t = e^{\alpha}$ з використанням перетворення Фур'є по новій змінній:

$$\sum_{m=-l}^{l} A_m(x) F(x - mi) = \sum_{m=-l}^{l} G(x - mi)\,.$$

Аналогічний результат отримано і для лінійного неоднорідного диференціального рівняння n–го порядку з експоненціальними коефіцієнтами

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{m=-l}^{l} \alpha_{k,m} e^{-mx} f^{(k)}(x) = h(x), \qquad x \in R \;.$$

Розв'язок диференціальних рівнянь в частинних похідних на площині з прямолінійними розрізами викликає значні математичні трудноші. Це питання вивчається в підрозділі 3.2.. Диференціальне рівняння в частинних похідних з відповідними умовами на розрізах зводиться до диференціально-різницевого рівняння:

$$\sum_{p=0}^{A} \sum_{q=0}^{B} a_{pq}(y) \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+p/\,2-j}(y)}{dy^q} = \mathrm{g_n(y)} \;, \quad y \in R, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \;, \tag{4}$$

де A, B цілі додатні числа, $A + B$ - порядок диференціально-різницевого рівняння, $a_{pq}(y), g_n(y)$ - задані функції, $u_n(y)$ - шукана функція.

Умови на прямолінійних розрізах такі:

$$\begin{aligned}
&c_{rs}\left\{\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\left[a_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s+0)}{dy^q} + \beta_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s-0)}{dy^q}\right] - g_{nrs}\right\} + \\
&+ a_{rs}R^n\left\{\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\left[\gamma_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s+0)}{dy^q} + \delta_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s-0)}{dy^q}\right] - g_{nrs}\right\} + \\
&+ b_{rs}R^{-n}\left\{\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\left[\mu_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s+0)}{dy^q} + \nu_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s-0)}{dy^q}\right] - g_{nrs}\right\} = 0, \\
&\qquad\qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,
\end{aligned} \tag{5}$$

де $r=\overline{1,m_s}$ - кількість умов на границі s, $s=\overline{1,N}$, послідовності g_{nrs} - задані в l_2, а $a_{rs}, b_{rs}, c_{rs}, \alpha_{pqrs}, \beta_{pqrs}, \gamma_{pqrs}, \delta_{pqrs}, \mu_{pqrs}, \nu_{pqrs}$, - задані числа, $0<R<1$.

Запропоновано розв'язок задачі (4)-(5) шляхом зведення її до матричної ЗК для кільця відносно функцій $C_{ks}(t)$:

$$\sum_{k=1}^{B}\left[P_{rsk}(Rt)C_{ks}(Rt) + \mathrm{M}_{rsk}(R^{-1}t)C_{ks}(R^{-1}t) + \mathrm{T}_{rsk}(t)C_{ks}(t)\right]=\mathrm{W}_{\mathrm{rs}}(\mathrm{t}) \ , |\mathrm{t}| =1 \ ,$$

де $s=\overline{1,N}$ - кількість меж, $r=\overline{1,m_s}$ - кількість умов на межі s, $P_{rsk}(z)$, $M_{rsk}(z)$, $T_{rsk}(z)$, $W_{rs}(z)$ - відомі функції $R^{-1} < |z| < R$, , $0<R<1$, $C_{rs}(z)$ - невідомі функції у цьому ж кільці.

Четвертий розділ складається із трьох підрозділів. В 4.1. розглядається лінійне однорідне диференціальне рівняння з поліноміальними коефіцієнтами

$$\sum_{k=0}^{n} t^{k}\left(\alpha_k t^{-1} + \beta_k\right)y^{(k)}(t) = 0, \qquad t \ \geq 0 \ , \tag{6}$$

де $\alpha_k \in R, \beta_k \in R,\ k=\overline{0,n},\ \alpha_n \neq 0, \beta_n \neq 0$, $y(x)$ – невідома функція, що належить просторові узагальнених функцій.

Теорема 4.1. *Нехай* $\alpha_k \in R$, $\beta_k \in R$, $k=\overline{0,n}$ *такі, що 1)* $\operatorname{sgn}\alpha_{\mathrm{n}} = -\operatorname{sgn}\beta_{\mathrm{n}}$,

2) $A(\mathrm{x}) \neq 0$, *де* $A(x) = \dfrac{x^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{x^k b_k}{b_n}}{x^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{x^k a_k}{a_n}}$, $a_k = (-i)^k \sum\limits_{j=k}^{n} c_j C_j^k$, $b_k = (-i)^k d_k$,

$k=\overline{0,n}$, $c_0=\alpha_0$, $c_k = \sum\limits_{\mathrm{j=k}}^{\mathrm{n}} \alpha_{\mathrm{j}}\, \mathrm{s}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{j}}$, $k=\overline{1,n}$, $d_0=\beta_0$, $d_k = \sum\limits_{j=k}^{n}\beta_j\, s_k^j$, $k=\overline{1,n}$,

а s_j^k *- коефіцієнти, які однозначно визначаються через коефіцієнти рівняння (6).*

3) $\dfrac{\beta_{n-1}}{\beta_n} - \dfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = C_n^{n-1}$. *Тоді частинний розв'язок рівняння (6) визначається формулою*

$$y(t) = C\,\delta\left(t + \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) + C\,\varphi\left[\ln\left(-\frac{\beta_n}{\alpha_n}t\right)\right],\ \text{де}\ \varphi(x) = (V^{-1}\Phi(x))(x),\ \Phi(x) = X(x)-1,\ C - \text{стала},$$

$$X(x) = \exp\left(-\frac{\ln A(x)}{2} - \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln A(t)}{th\,\pi(x-t)}dt\right).$$

В деяких випадках частинний розв'язок диференціального рівняння (6) можна знайти в явному вигляді. Має місце наступна

Теорема 4.2. *Нехай коефіцієнти* $\alpha_k \in R$, $\beta_k \in R$, $k=\overline{0,n}$ *лінійного однорідного диференціального рівняння (6) парного порядку такі, що*

1) $\operatorname{sgn}\alpha_n = -\operatorname{sgn}\beta_n$, *2)* $A(x)\neq 0$, *3)* $\dfrac{\beta_{n-1}}{\beta_n} - \dfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = C_n^{n-1}$

і корені чисельника $x_1^{(j)}$ *і знаменника* $x_2^{(j)}$ *дробово-раціональної функції A(x) такі, що:*

4) $\operatorname{Re} x_1^{(j)} = \operatorname{Re} x_2^{(j)}$, $j=\overline{1,n}$, *5)* $\operatorname{Im} x_1^{(j)} = \operatorname{Im} x_2^{(j)} - 1$, $\operatorname{Im} x_1^{(j+1)} - 1 = \operatorname{Im} x_2^{(j+1)}$, $j = 1,3,5,\ldots, n-1$.

Тоді частинний розв'язок рівняння (4) визначається формулою

$y(t) = C\,\delta\left(t+\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right) + C\,i\sum_{k=1}^{n/2} y_k(t)$, $t \geq 0$, *де C - стала ,* $\delta(x)$ *- дельта функція,*

$$y_k(t) = \begin{cases} \mathrm{B}_k \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z_2^{(k)}))\, t^{-i z_2^{(k)}} \left(-\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^{i z_2^{(k)}} \eta\left(t+\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right), & \operatorname{Im}(z_2^{(k)})\neq 0 \\ -\mathrm{B}_k \operatorname{sgn}\left(t+\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right) & \operatorname{Im}(z_2^{(k)}) = 0 \end{cases},$$

$z_2^{(k)} = \operatorname{Re} x_2^{(2k-1)} + i\operatorname{Im} x_1^{(2k)}$, $k=\overline{1,n/2}$, $\eta(t)$ *- одинична функція Хевісайда.*

Побудовано в квадратурах також розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $\sum_{k=0}^{n} t^k\left(\alpha_k t^{-1} + \beta_k\right) y^{(k)}(t) = h(t)$, $t \geq 0$, де $\alpha_k\in R$, $\beta_k \in R$, $k=\overline{0,n}$, $\alpha_n\neq 0$, $\beta_n\neq 0$.

Аналогічні дослідження проводились і для лінійних диференціальних рівнянь (як однорідних, так і неоднорідних) виду

$\sum_{k=0}^{n} t^k\left(\alpha_k t^{-1} + \beta_k t\right) y^{(k)}(t) = h(t)$, $t \geq 0$, де $\alpha_k\in R$, $\beta_k\in R$, $k=\overline{0,n}$, $\alpha_n\neq 0$, $\beta_n\neq 0$.

$\sum_{k=0}^{n}\left(\alpha_k e^{-x} + \beta_k\right) y^{(k)}(x) = g(x)$, $-\infty < x < +\infty$, де $\alpha_k\in R$, $\beta_k\in R$, $k=\overline{0,n}$, $\alpha_n\neq 0$, $\beta_n\neq 0$.

$\sum_{k=0}^{n}\left(\alpha_k e^{-x} + \beta_k e^{x}\right) y^{(k)}(x) = g(x)$, $-\infty < x < +\infty$, де $\alpha_k\in R$, $\beta_k\in R$, $k=\overline{0,n}$, $\alpha_n\neq 0$, $\beta_n\neq 0$.

В підрозділі 4.2 розглянуто однорідне диференціальне рівняння з осцилюючими коефіцієнтами

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\alpha_k e^{i\gamma\gamma} + \beta_k e^{-i\gamma\gamma}\right) y^{(k)}(x) = 0, \qquad x\in R, \tag{7}$$

де $\alpha_k, \beta_k \in C, k=\overline{0,n}$, $\gamma\in \mathrm{R}$, $\gamma > 0$. Невідому функцію *y(x)* шукаємо в просторі узагальнених функцій. Скориставшись перетворенням Фур'є та зробивши заміну $s = x-\gamma$, $s\in\mathrm{R}$, зводимо (5) до функціонального рівняння

$$Y(s+2\gamma) = C(s)Y(s), \quad s\in\mathrm{R}, \tag{8}$$

де $C(s) = -\dfrac{B(s+\gamma)}{A(s+\gamma)}$, $A(x) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k(-i(x+\gamma))^k$, $B(x) = \sum_{k=0}^{n}\beta_k(-i(x-\gamma))^k$.

Для дослідження функціонального рівняння вводимо функцію зсуву $a(s)=s+2\gamma$. Зсув $a(s): R\to R$ є гомеоморфізм, який зберігає орієнтацію дійсної вісі і має нерухомі точки $-\infty$, $+\infty$.

Теорема 4.13. *Нехай* $A(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(-i(x+\gamma))^k$, $B(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k(-i(x-\gamma))^k$,

де $\alpha_k,\beta_k\in C$, $k=\overline{0,n}$, $\gamma\in \mathrm{R}$, $\gamma>0$ *- коефіцієнти однорідного диференціального рівняння (7). Тоді, якщо: 1) функції* $A(x)$, $B(x)$ *не мають дійсних коренів і*

$\dfrac{\sum_{k=0}^{n}\beta_k(-i)^k s^k}{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(-i)^k(s+2\gamma)^k}\equiv 1$, $\forall s\in R$, *то розв'язок рівняння (7) отримуємо оберненим перетворенням Фур'є функції* $Y(s)=C, s\in R$, *C- стала. Очевидно, що в цьому випадку розв'язок -* $y(x)=C\sqrt{2\pi}\delta(x)$; *2) функції* $A(x)$, $B(x)$ *не мають дійсних коренів і виконуються умови:* $\alpha_n=-\beta_n$, $(-i)^{n-1}(\beta_{n-1}+\alpha_{n-1}-iC_n^1 2\gamma\alpha_n)=0$, *то розв'язок рівняння (7) отримуємо оберненим перетворенням Фур'є функції*

$Y(s)=\begin{cases} P^{-\infty}(s) , & s\in[-\infty, s_*] \\ \dfrac{C}{P^{+\infty}(s)} , & s\notin[-\infty, s_*] \end{cases}$, *де* s_* *- деяка точка із* $(-\infty,+\infty)$, $C=P^{-\infty}(s)P^{+\infty}(s)$ *- стала,*

$$P^{+\infty}(s)=\prod_{l=0}^{+\infty}C(s+2\gamma l)\ ,\ P^{-\infty}(s)=\prod_{l=1}^{+\infty}C(s-2\gamma l).$$

Інші теореми підрозділі 4.2. мають аналогічний характер. Вони враховують наявність нулів функцій $A(x)$ і $B(x)$ на дійсній вісі.

В підрозділі 4.3., розглянуто приклад, в якому на основі наближеного розв'язку трьохелементної ЗК для смуги знайдено наближений розв'язок конкретного диференціального рівняння з поліноміальними коефіцієнтами.

У п'ятому розділі розглядається задача знаходження прогину $u(\alpha,\beta)$ пружної тонкої плити у формі лунки, яка згинається поперечним навантаженням за умовою, що один край лунки жорстко закріплено, а другий – вільно опирається.

Математична постановка задачі полягає в розв'язанні бігармонічного рівняння

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right]\left(\frac{u}{h}\right) = qh^3 ,$$

з крайовими умовами:

$$\left.\frac{u(\alpha,\beta)}{h(\alpha,\beta)}\right|_{\beta=0} = \left.\frac{\partial(u/h)}{\partial\beta}\right|_{\beta=0}=0,\ \left.\frac{u(\alpha,\beta)}{h(\alpha,\beta)}\right|_{\beta=\gamma}=0,\ \left.\left((ch\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2(u/h)}{\partial\beta^2}+2\sin\beta\frac{\partial(u/h)}{\partial\beta}-\frac{a}{R}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\right|_{\beta=\gamma}=0,$$

де $R = \dfrac{a}{|\sin\gamma|}$ - радіус дуги, $\dfrac{\partial u}{\partial\rho} = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} x + (\mathrm{y} - \mathrm{C_o})\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}\right)$.

Задача зводиться до п'ятиелементної ЗК для смуги

$$\Psi(\lambda+2i) + \mathrm{B}_1(\lambda+\mathrm{i})\Psi(\lambda+\mathrm{i}) + \mathrm{B}_2(\lambda)\Psi(\lambda) + \mathrm{B}_3(\lambda-\mathrm{i})\Psi(\lambda-\mathrm{i}) + \Psi(\lambda-2i) = H(\lambda)\ .$$

Доведено, що ця задача являється нетеровою, безумовно розв'язною та має єдиний розв'язок в просторі $L_2(R)$.

Оскільки питання про точний розв'язок цієї задачі залишається відкритим, то розглядається питання про її наближений розв'язок, який шукається у вигляді:

$$\Psi_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{n}[\,\alpha_{\mathrm{k}}^{+}\,\varphi_{\mathrm{k}}^{+}(\lambda) + \alpha_{\mathrm{k}}^{-}\,\varphi_{\mathrm{k}}^{-}(\lambda)\,] \quad ,$$

де $\alpha_k^{\pm}$, $\mathrm{k} = \overline{1,\mathrm{n}}$ – невідомі коефіцієнти, які є розв'язком системи рівнянь, що будується за методом Бубнова-Гальоркіна.

В додатку розглянуто клас нескінчених систем плавного переходу, яка зводиться до ЗК в кільці

$$\begin{cases} (\alpha_1 R^{-n} + \beta_1 R^n + \gamma_1)\displaystyle\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{+\infty} \mathrm{a}_{\mathrm{n-k}} u_k + \quad (\alpha_2 R^{-n} + \beta_2 R^n + \gamma_2)\displaystyle\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{+\infty} \mathrm{b}_{\mathrm{n-k}} v_k = \mathrm{g}_{1\mathrm{n}} \\ (\alpha_3 R^{-n} + \beta_3 R^n + \gamma_3)\displaystyle\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{+\infty} \mathrm{c}_{\mathrm{n-k}} u_k + \quad (\alpha_4 R^{-n} + \beta_4 R^n + \gamma_4)\displaystyle\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}_{\mathrm{n-k}} v_k = \mathrm{g}_{2\mathrm{n}}\,, \\ \mathrm{n} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots , \end{cases}$$

де коефіцієнти $a_n, \mathrm{b_n}, \mathrm{c_n}, \mathrm{d_n}$ належать простору l_1, а послідовності g_{1n}, g_{2n} - із простору l_2, $|R|<1$, а α_i, β_i, γ_i $\ i = \overline{1,4}$ - довільні сталі, які однозначно відмінні від нуля. Послідовності $\{u_k\}, \{\mathrm{v_k}\}$ шукаємо в просторі l_2 .

Застосовуючи пряме перетворення Лорана та теорему про згортку, отримуємо матричну задачу у кільці:

$$\begin{cases} A(t)[\alpha_1 U(R^{-1}t) + \beta_1 U(Rt) + \gamma_1 U(t)] + \quad B(t)[\alpha_2 V(R^{-1}t) + \beta_2 V(Rt) + \gamma_2 V(t)] = G_1(t) \\ C(t)[\alpha_3 U(R^{-1}t) + \beta_3 U(Rt) + \gamma_3 U(t)] + \quad D(t)[\alpha_4 V(R^{-1}t) + \beta_4 V(Rt) + \gamma_4 V(t)] = G_2(t), \end{cases} \qquad |\mathrm{t}|=1$$

причому функції $A(t), \mathrm{B(t)}, \mathrm{C(t)}, \mathrm{D(t)}$ відмінні від нуля.

ВИСНОВКИ

На основі досліджень, проведених в дисертації, одержано наступні основні результати:

1. Суттєво розвинено теорію задачі Карлемана для смуги та кільця. Зокрема:

а) вперше отримано точний розв’язок задачі Карлемана в кільці для двох пар функцій в окремому випадку ;

б) доведено існування та єдиність розв’язку задачі Карлемана у кільці з радіальним зсувом усередину області в симетричному випадку;

в) запропоновано аналітичний метод наближеного розв'язування многоелементної задачі Карлемана для смуги і кільця.

2. Завдяки розвиненої теорії задачі Карлемана наведені теоретичні узагальнення та нові рішення наукових проблем, які пов'язані з розв'язанням класу лінійних диференціальних рівнянь з поліноміальними та експоненціальними коефіцієнтами. В окремих випадках побудовано точні розв'язки рівнянь вказаних типів. В більш загальних випадках запропоновано аналітичний метод наближеного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з поліноміальними та експоненціальними коефіцієнтами.

3. Запропоновано з обгрунтуванням алгоритм побудови наближеного розв'язку однієї задачі пружності, яка відомими методами розв'язати не вдається.

4. Реалізовано новий підхід до аналітичного розв'язання лінійних диференціальних рівнянь з осцилюючими коефіцієнтами.

5. Описано клас нескінченних систем "плавного переходу", які зводяться до задачі Карлемана у кільці. В окремих випадках отримані точні розв'язки цих систем.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ

[1]. Хачатуров С.Ю. О существовании решения задачи Карлемана для кольца // “ Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики и их приложения”. Сб. научных трудов Института математики НАН Украины. Киев, 1997. - С. 214-217.

[2]. Керекеша П.В., Хачатуров С.Ю. Задача Карлемана в кольце для двух пар функций // Укр. мат. журн. - 1997. – Т. 49, № 5. - С. 662-671.

[3]. Керекеша П.В., Хачатуров С.Ю. Смешанная задача о прогибе тонкой упругой плиты луночной формы // Прикл. механика. - 1998. – Т. 34, №1. - С. 85-91.

[4]. Керекеша Д.П., Хачатуров С.Ю. Об одном линейном однородном дифференциальном уравнении с осциллирующими коэффициентами // Одесс. гос. ун-т. - Одесса, 1997. – 19 с. – Рус. - Деп. в ГНТБ Украины 23.12.97, № 535 -Ук97.

[5]. Керекеша П.В., Хачатуров С.Ю. Приближенное решение пятиэлементной задачи Карлемана, для полосы с аналитическим сдвигом во внутрь области с приложением // Тезисы докладов Междунар. конф. “Алгебра и анализ”. - Том 2. – Казань: КГУ. - 1994. - С. 70.

[6]. Хачатуров С.Ю. О решении линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка с экспоненциальными коэффициентами // Тезисы докладов на Воронежской весенней математической школе “Понтрягинские чтения -XI”. – Воронеж: ВГУ. - 2000. - С. 149.

[7]. Хачатуров С.Ю. О решении линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с полиномиальными коэффициентами // Тези доп. Міжнар. конф. “Диференціальні та інтегральні рівняння”. – Одесса: ОГУ. - 2000. - С. 284.

Хачатуров С. Ю. Многоелементна задача Карлемана та її застосування до диференціальних рівнянь. - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за фахом 01.01.02 - диференціальні рівняння. - Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова, Одеса, 2001.

Дисертація присвячена розвитку методу спряження аналітичних функцій з метою застосування його для конструктивної побудови розв'язків деяких класів диференціальних рівнянь

Показано, що лінійні диференціальні рівняння n-го порядку з поліноміальними та експоненціальними коефіцієнтами спеціальної структури зводяться до многоелементної задачі Карлемана у смузі, а диференціально-різницеві рівняння – до матричної задачі Карлемана у кільці.

Для розв'язання задачі Карлемана застосовуються результати досліджень Черського Ю.Й. , Керекеші П.В., Тихоненка М.Я., а також результати, що отримані в дисертаційній роботі Це дозволило одержати низку нових результатів з теорії лінійних диференціальних рівнянь. Зокрема, виділені класи диференціальних рівнянь n-го порядку, розв'язки яких побудовані в явному вигляді. Для деяких класів лінійних диференціальних рівнянь з поліноміальними та експоненціальними коефіцієнтами одержано їх точний розв'язок. В загальному випадку для цього типу рівнянь запропоновано алгоритм наближеного розв'язання, який базується на методі Бубнова-Гальоркіна.

Отримано розв'язок одного типу лінійних диференціальних рівнянь з осцилюючими коефіцієнтами. Крім цього, розглянуто систему двох нескінчених систем "плавного переходу", яка зводиться до задачі Карлемана для двох пар функцій. В окремому випадку будується точний розв'язок згаданої системи.

Ключові слова: задача Карлемана, факторизація, кільце, смуга, диференціальні рівняння , перетворення Фур'є

Khachaturov S.Yu. Multi-element Carleman’s problem and its application to the differential equations. – Manuscript

The thesis for the degree of the Candidate of physical and mathematical sciences on speciality 01.01.02 – Differential equations. – The I.I. Mechnikov Odessa National University, Odessa, 2001.

The thesis is devoted to development of the analytic-function conjugation method so as to apply it to the constructive construction of solution for classes of differential equations. It has been shown that the n-th order linear differential equations with polynomial and exponential special-structure coefficients are reduced to the multi-element Carleman’s problem within the band, and the differentially-defference equations – to the Carleman's matrix problem in the ring. For Carleman's problem solving, the results of Yu.I. Chersky, P.V.Kerekesha, N.Ya. Tikhonenko's studies have been used, as well as the results obtained in the thesis. It allows to obtain a number of new results from the theory of linear differential equations. Particulary, the classes of the n-th order differential equations have been located, the solutions of which are constructed in the obvious form. For some classes of the linear differential equations with polinomial and exponential coefficients, their precise solutions has been obtained. In the general case the algorithm of the algorithm of the approximated solution has been offered for this type of the equations which is based on the Bubnov-Galyorkin method. The solution of one type of the linear differential equations with oscillating coefficients has been obtained. Moreover, the system comprised of 2 infinite systems with "smooth transition" has been considered. It is reduced to the Carleman's problem for 2 pairs of functions. In some specific case a precise solution of the system mentioned above is to be constructed.

Key words: Carleman’s problem, factorisation, a ring, a band, a differential equation, a multi-element problem.

Хачатуров С.Ю. Многоэлементная задача Карлемана и ее применение к дифференциальным уравнениям. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, Одесса, 2001.

Диссертация посвящена развитию метода сопряжения аналитических функций с целью применения его к конструктивному построению решений некоторых классов дифференциальных уравнений.

Показано, что линейные дифференциальные уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} t^k \sum_{m=-l}^{l} \alpha_{k,m} t^m y^{(k)}(t) = h(t), \qquad t \geq 0$$

и $\sum_{k=0}^{n} \sum_{m=-l}^{l} \alpha_{k,m} e^{-mx} f^{(k)}(x) = h(x), \qquad x \in R, \qquad \alpha_{k,m} \in C, \qquad k = \overline{0,n}, \qquad \mathrm{m} = \overline{-l,l}\ , \qquad 1 \leq \mathrm{n} < \infty$

сводятся к задаче сопряжения аналитических функций – к многоэлементной задаче Карлемана для полосы

$$\sum_{p=-m}^{m} A_p(\lambda) \Phi(\lambda + pi) = H(\lambda),$$

где $A_p(\lambda)$, $\mathrm{p} = \overline{-\mathrm{m},\mathrm{m}}$ непрерывные на $0X$ функции, $H(\lambda) \in L_2(R)$ - заданная функция, $\Phi(z)$ - искомая в полосе $-m < \operatorname{Im} z < m$ функция, а дифференциально-разностное уравнение

$$\sum_{p=0}^{A}\sum_{q=0}^{B} a_{pq} \sum_{j=0}^{p} (-1)^{j} C_{p}^{j} \frac{d^{q} u_{n+p/\ 2-j}(y)}{dy^{q}} = \mathrm{g_n}(y)\ ,\quad y \in R, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ ,$$

(где A, B целые положительные числа, $A + B$ - порядок диференциально-разностного уравнения, $a_{pq}(y), g_{n}(y)$ -заданные функции, $u_{n}(y)$ - искомая функция) с заданными специальными условиями на прямолинейных разрезах сводится к матричной задаче Карлемана в кольце

$$\sum_{k=1}^{B}\left[P_{rsk}(Rt)C_{ks}(Rt) + \mathrm{M}_{rsk}(R^{-1}t)C_{ks}(R^{-1}t) + \mathrm{T}_{rsk}(t)C_{ks}(t)\right] = \mathrm{W_{rs}(t)}\ ,\ |\,\mathrm{t}\,| = 1\ ,$$

где $s = \overline{1, N}$ - количество границ, $r = \overline{1, m_s}$ - количество условий на границе s, $P_{rsk}(z),\ \mathrm{M}_{rsk}(z),\ \mathrm{T}_{rsk}(z),\ \ \mathrm{W_{rs}(z)}$ - известные функции в кольце $R^{-1} < |\,z\,| < R,\ ,\ \ 0 < R < 1$, $\mathrm{C_{rs}(z)}$ - неизвестные функции в этом же кольце.

Для решения указанных задач Карлемана и соответствующих им дифференциальных уравнений используются результаты Черского Ю.И., Керекеши П.В., Тихоненко Н.Я. и результаты, полученные в диссертационной работе. В частности: 1) получено точное решение задачи Карлемана в кольце для двух пар функций как в случае нулевого индекса, так и в более общем случае;

2) доказано существование и единственность решения задачи Карлемана в кольце вида

$$A(t)\Phi(Rt) + B(t)\Phi(R^{-1}t) + C(t)\Phi(t) = G(t), \qquad |\,\mathrm{t}\,| = 1,$$

(где $A(t), B(t), C(t), |\,t\,| = 1$ - известные функции из пространства Винера W, $G(t),\ |\,t\,| = 1$ -известная функция из $L_2(|\,t\,| = 1)$, а $\Phi(z)$ - неизвестная аналитическая функция в кольце $R^{-1} < |z| < R$, $1 < R < \infty$; 3) выделены классы линейных однородных дифференциальных уравнений n-го порядка, которые при помощи теории задачи Карлемана в полосе решены в явном виде; 4) разработан аналитический метод приближенного решения многоэлементной задачи Карлемана в полосе и матричной задачи Карлемана в кольце; 5) предложен новый подход к решению линейных однородных дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами вида

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\alpha_k e^{i\gamma x} + \beta_k e^{-i\gamma x}\right) y^{(k)}(x) = 0, \qquad \mathrm{x} \in R\ .$$

Благодаря ему получены условия существования решения и построены конструктивно эти решения; 6) построено с обоснованием аналитическое приближенное решение пятиэлементной задачи, связанной с решением одной задачи теории упругости, которая известными методами не поддавалась решению; 7) изучены системы двух бесконечных систем "плавного перехода", в отдельных случаях получены их точные решения.

Ключевые слова: задача Карлемана, факторизация, кольцо, полоса, дифференциальное уравнение, преобразование Фурье.