ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. И.И. МЕЧНИКОВА

На правах рукописи

ХАЧАТУРОВ СЕРГЕЙ ЮРЬЕВИЧ

УДК 517.926

МНОГОЭЛЕМЕНТНАЯ ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени кандидата

физико - математических наук

Научный руководитель :

Керекеша Пётр Владимирович

доктор физико - математических наук,

профессор

Одесса - 2000

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. При исследовании прикладных задач, в частности, задач моделирования и прогнозирования физических явлений, используются в качестве математических моделей обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных и дифференциально-разностные уравнения.

При исследовании указанных дифференциальных уравнений используют различные методы. Одним из новых и перспективных является комбинированный метод интегральных преобразований и сопряжения аналитических функций. Этот метод включает в себя конструктивную мощь интегральных преобразований и стройность теории функций комплексного переменого. Термин "сопряжение" был введён известным математиком и механиком Н.И. Мусхелишвили. Метод решения краевых задач с помощью сопряжения аналитических функций называется методом сопряжения. При этом сопряжение осуществляется линейным образом и через границу области. Такое сопряжение ещё называют задачей Римана.

Второй задачей сопряжения является задача Карлемана (дальше ЗК), но только сопряжение аналитических функций осуществляется несколько сложным путём.

Граничную задачу, носящую его имя, Т. Карлеман представил в 1932 году на II конгрессе математиков (г. Цюрих) [70].

Теория ЗК и её обобщение изложено в монографии Г.С. Литвинчука [42]. Там же приводится обширная библиография по ЗК. Приведённые в ней исследования, в основном, имеют качественный характер. И лишь при выходе в свет работы Ю.И. Черского [66] исследование по ЗК стали носить конструктивный характер.

Начиная с 80-х годов XX века, с помощью ЗК для полосы были получены решения ранее "недоступных" задач математической физики. Здесь следует отметить работы Банцури Р.Д., Дащенко А.Ф., Керекеши П.В., Тихоненко Л.Я., Попова Г.Я.

В 1974 году Ю.И. Черский (см.[65]) впервые показал, что линейные дифференциальные уравнения (дальше ЛДУ) с полиномиальными коэффициентами специального вида с помощью интегрального преобразования сводятся к ЗК для полосы. Эту задачу он решил в квадратурах и тем самым указал метод точного решения рассмотренного класса ЛДУ.

Научный интерес к аналитическим решениям ЛДУ существовал и будет существовать. Это связано с тем, что аналитические решения дают возможность более адекватно исследовать реальные явления, которые моделируются соответствующими дифференциальными уравнениями. В известном справочнике Камке Э. [21] приводятся примеры точных решений ЛДУ с полиномиальными коэффициентами со второго до четвёртого порядка включительно. Но в приведенных примерах не видно единого метода их решения. Относительно метода, что базируется на исследовании ЗК для полосы, то он является в некоторой мере универсальным. Он позволяет исследовать ЛДУ с полиномиальными коэффициентами в общем случае, однако при этом нужно проводить исследования многоэлементной ЗК для полосы. Более того, существует класс ЛДУ с экспоненциальными коэффициентами и класс краевых задач математической физики, которые также с помощью интегрального преобразования Фурье сводятся к многоэлементной ЗК для полосы. Поэтому исследования многоэлементной ЗК для полосы является актуальным как с точки зрения развития ЗК для полосы, так и с точки зрения применения теории ЗК для решения новых классов дифференциальных уравнений.

В последнее время, кроме ЗК для полосы, исследуется и ЗК в кольце. Научных работ, посвящённых исследованию ЗК в кольце очень мало.

Конструктивным решением ЗК в кольце занимался Зверович Э.И., Керекеша П.В. и Черский Ю.И., а разработкой аналитических методов для решения ЗК в кольце - Тихоненко Н.Я. Иные работы в этом направлении соискателю не известны. В связи с этим возникает актуальность проблемы развития теории ЗК в кольце.

ЛДУ с осциллирующими коэффициентами также является предметом исследования диссертанта. Изучение таких уравнений проводятся и в последнее время. Поэтому исследование ЛДУ указанного типа является актуальной проблемой. Кроме того, метод исследования отличается от известных. Он базируется на исследовании функционального уравнения со сдвигом на вещественную ось.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссертационная работа выполнена в рамках бюджетных научно - исследовательских тем, которые проводилась в Институте математики, экономики и механики при Одесском национальном университете им. И.И. Мечникова согласно координиционному плану научных исследований Министерства образования и науки Украины, а также по теме 1.153 ДК Украины. В рамках указанной темы выполнена работа [31].

Цели и задачи исследования. Целью работы является построение решений (точных и приближённых) некоторых классов дифференциальных уравнений. Рассматриваются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных, сводящиеся к задачам Карлемана для полосы и кольца. Метод исследования состоит в построении конструктивного решения ЗК, а, следовательно, и решения исходных дифференциальных уравнений. При сведении дифференциальных уравнений к ЗК используются аппараты преобразований Фурье и Лорана.

Научная новизна полученных результатов.

1) впервые получено точное решение ЗК в кольце для двух пар функций в частном случае;

2) доказано существование и единственность решения ЗК в кольце;

3) получено точное решение одного класса линейных дифференциальных уравнений n-го порядка с полиномиальными и экспоненциальными коэффициентами, а также дифференциальных уравнений с осциллирующим коэффициентами;

4) описан класс бесконечных систем алгебраических уравнений плавного перехода, которые сводятся к ЗК в кольце;

5) обоснован аналатический метод приближённого решения многоэлементной ЗК в кольце и в полосе.

Практическое значение полученных результатов. Диссертация имеет как теоретическое, так и практическое значение. Теоретическая ценность работы состоит в доказательстве существования решения трёхэлементной ЗК в кольце и в конструктивном построении решения некоторых классов дифференциальных уравнений. В тех случаях, когда не получается построить точное решение, предложен метод приближённого решения трёхэлементной ЗК в кольце и усовершенствован метод приближённого решения многоэлементной ЗК в полосе. Практическое значение полученных результатов состоит в том, что предложенные методы могут быть применены к решению некоторых задач математической физики (теория упругости, теория распространения волн и других).

Личный вклад диссертанта. Работы [30-32] выполнены в соавторстве с научным руководителем. В работе [30] научному руководителю принадлежит постановка ЗК для двух пар функций, метод её решения в случае нулевого индекса и практическое применение. Реализация метода конструктивного решения ЗК в случае нулевого индекса и исследование более общего случая принадлежат диссертанту. Реализована также схема построения двух бесконечных систем плавного перехода, которая предложена научным руководителем. В работе [31] научному руководителю принадлежат постановка задачи и метод её решения, а также исследование сгибающего момента в угловых точках. Исследование условий разрешимости задачи, построение её приближённого решения, исследование его сходимости и численный эксперимент принадлежат диссертанту. В работе [32] научному руководителю принадлежат постановка задачи и метод её решения. Исследование условий существования и единственности решения принадлежат соискателю. В работе [33] соавтору принадлежит сведение однородного дифференциального уравнения с осциллирующими коэффициентами к функциональному уравнению. Исследование и построение решения функционального уравнения принадлежат соискателю. Работы [61-63] выполнены диссертантом.

Апробация результатов диссертации Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на международной научной конференции "Алгебра и анализ" (Казань, 1994); на IV международной конференции по механике неоднородных структур (Тернополь, 1995); на V международной конференции им. М. Кравчука (Киев, 1996); на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения -XI" "Современные методы в теории краевых задач" (Воронеж, 2000); на международной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения" (Одесса, 2000); на научном семинаре кафедры методов математической физики Одесского национального университета им. И.И. Мечникова (руководитель семинара - проф. Попова Г.Я.); на научном семинаре кафедры вычислительной математики Одесского национального университета им. И.И. Мечникова (руководитель семинара - проф. Тихоненко Н.Я.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано семь работ ([30-33], [61-63]): две статьи в отечественных ведущих профессиональных изданиях ([30,31]), одна статья в сборнике научных трудов Института математики НАН

Украины ([61]), одна статья задепонирована ([33]), три - в сборниках докладов международных научных конференций ([32], [62,63]).

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа содержит вступление, пять разделов, разбитых на 10 подразделов, вывод и приложение. Общий объем диссертации составляет 129 страниц машинописного текста. Две таблицы занимают одну страницу. Объём приложения состовляет 5 страниц. Список использованных источников состоит из 70 наименований.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю - доктору ф.-м.н., профессору кафедры высшей математики Керекеше П.В. за постановку задач, научные консультации и советы, за внимание, оказанное на протяжении всей работы.

РАЗДЕЛ 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ И ВЫБОР НАПРАВЛЕНИЙ ИССЛЕДОВАНИЯ

Во введении отмечена история возникновения ЗК и указана монография Литвинчука Г.С. [42], в которой достаточно полно изложена теория краевой ЗК. Следует отметить, что основополагающее теоретическое исследование ЗК дал Квеселава Д.А. [23]. Автор монографии [42] и авторы многочисленных работ, на которых ссылается Литвинчук Г.С., проводили исследования, в основном, функционально-теоретического характера (нётеровость, индекс, условия нормальной разрешимости и т.п.). Почти 40 лет исследователи по ЗК этим и ограничивались. И вот в 1970 году вышла работа Черского Ю.И. [66] (первый вариант [64] датируется 1967-м годом), в которой он рассмотрел так названное им уравнение плавного перехода

$$f(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(t-s)f(s)\,ds\;-\;g(t)\;+$$

$$+\,e^{-t}\left\{f(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_2(t-s)f(s)\,ds\;-g(t)\right\}\;=\;0\;, \tag{1.1.1}$$

$$-\infty<t<\infty\;.$$

Это уравнение Ю.И. Черский свёл к ЗК для полосы

$$\Phi(x+i)\;+\;A(x)\Phi(x)\;=\;G(x)\;\;x\in\mathcal{R}\quad, \tag{1.1.2}$$

где $A(x)-$ непрерывная на всей вещественной оси OX. Заданная функция $G(x)\in L_2(\mathcal{R})$, а $\Phi(z)$ – искомая функция, аналитически продолжима в полосу $0<Imz<1$ и такая, что существует постоянная C, при которой выполняется

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\Phi(x+iy)|^2\,dx\;\leq\;C\;,\;\forall y\in[0,1].$$

Интегральное уравнение (1.1.1.) Черский Ю.И. свёл к задаче (1.1.2) при условии, что известная функция $g(x) \in L_2(R)$, неизвестная функция $f(x)$ ищется в том же пространстве $L_2(R)$, ядерные функции $K_1(x), K_2(x)$ принадлежат пространству $L(R)$.

ЗК (1.1.2) Ю.И. Черский решил в квадратурах и, как следствие этого, доказал ряд теорем качественного характера.

Конструктивная направленность и теоретическая завершенность исследования Ю.И. Черского привлекли внимание математиков-прикладников. В работах Попова Г.Я. [48], Банцури Р.Д. [3], Тихоненко Л.Я. [57], Нуллера Б.М. [47] приводятся точные решения ранее "недоступных" задач теории упругости.

В этот период Ю.И. Черский указал класс задач математической физики, сводящихся к ЗК. Исследованиями этого направления занимались также Керекеша П.В., Медерос О. [29,44].

Принципиально новой, в смысле метода решения, стала задача теории упругости, рассмотренная в работе Дащенко А.Ф., Керекеши П.В., Попова Г.Я. [17]. Она была сведена к ЗК для полосы вида

$$\Phi(x+i) + \Phi(x-i) + C(x)\Phi(x) = G(x) \;\; x \in \mathcal{R}\,. \tag{1.1.3}$$

Более общая ЗК для полосы имеет вид

$$A(x)\Phi(x+i) + B(x)\Phi(x-i) + C(x)\Phi(x) = G(x) \;\; x \in \mathcal{R}\,. \tag{1.1.4}$$

Задачи (1.1.3), (1.1.4) называются ЗК для симметричной полосы с паралельным сдвигом на вещественную ось или трёхэлементной ЗК для полосы. Для единообразия в диссертационной работе используется последний термин.

Трёхэлементной ЗК для полосы будем называть задачу о нахождении функции $\Phi(z)$, аналитической в полосе $|Imz| < 1$, предельные значения которой связаны соотношением (1.1.4), где $A(x), B(x), C(x)$ - непрерывные на сомкнутой вещественной оси функции, $G(x) \in L_2(\mathcal{R})$ и интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x+iy)|^2\, dx \ < \ +\infty$$

равномерно для всех $y \in [-1, 1]$.

Кроме работы [17], в которой конкретная задача теории упругости свелась к ЗК (1.1.3), отметим также работы [8,35,40,41], где проблемы прикладного характера сводятся к трёхэлементной ЗК вида (1.1.4). Укажем, что при весьма определённом коэффициенте ЗК (1.1.3) была эффективно решена в работах [40,41]. В общем случае пока не существует построение точного решения задачи (1.1.4). В связи с этим возникла потребность в исследовании ЗК (1.1.4) в чисто теоретическом плане. Первые теоретические результаты, относящиеся к исследованию 3-х элементной ЗК, получены в [8,22,28,29,44]. В частности в работе [22] была установлена нётеровость, подсчитан индекс и указаны условия разрешимости. Более полные исследования задачи (1.1.4) (по вопросам существования, единственности, асимптотического поведения решения) были проведены Керекешой П.В. в работах [26]. В случае нормальной разрешимости построено приближённое решение ЗК (1.1.3) с соответствующей оценкой погрешности. Там же приводятся случаи точного решения задачи Карлемана. Укажем также работу [14], где получено точное решение трехэлементной задачи Карлемана (1.1.1) для полосы с комплексно сопряженными коэффициентами $B(x) = \overline{A(x)}$.

Ещё более сложная, в смысле количества сдвигов, ЗК появилась в работе П.В. Керекеши и С.Ю. Хачатурова [31]. Она получилась при исследовании задачи о прогибе тонкой упругой плиты луночной формы при условии, что один край жёстко закреплён, а второй - свободно опертый. Метод, описанный в монографии [60], не решает задачу о прогибе. Метод, предложенный в работе [31], позволяет решить полученную многоэлементную ЗК для полосы приближённо.

Как уже отмечалось, к настоящему моменту метод точного решения ЗК для полосы в общей постановке неизвестен, поэтому основное исследование многоэлементой ЗК для полосы связано с построением методов её приближённого решения. Отметим работы, связанные с решением этой проблемы. В работе [13] предложены метод наименьших квадратов и метод Бубнова - Галёркина для решения трёхэлементной задачи Карлемана для полосы в пространстве L_2 с весом. Приближённое решение ЗК ищется в виде отрезка ряда Фурье, по одной ортонормированной системе функций. Даются условия сходимости и оценки скорости сходимости. В работе [58] даны оценки приближения функций на вещественной оси и полуоси. Рассмотрены аппроксимации функций рядами Фурье в различных пространствах.

К ЗК для полосы сводится и линейное дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{k=0}^{n} t^k(\alpha_k t + \beta_k)\, y^{(k)}(t) \;=\; h(t)\ , \quad t \;>\; 0\ . \tag{1.1.5}$$

Оно было сведено к ЗК для полосы $0 < Imz < 1$ и решено в квадратурах при некоторых ограничениях, накладываемых на $\alpha_k,\ \beta_k$. Решение уравнения (1.1.5) искалось в пространстве функций, удовлетворяющих условию

$$\left\{y^{(k)}(t)t^{k-1/2}\right\} \in L_2]0,\infty[\ ,\ k=\overline{0,n}.$$

Впервые это было показано в работе Черского Ю.И. [65].

Следует отметить, что если искать решение однородного уравнения (1.1.5), то в указанных пространствах оно будет иметь лишь тривиальное решение (y(t) $\equiv$ 0). В связи с этим отметим работу [25], в которой при $n = 2$ найдены нетривиальные решения однородного уравнения (1.1.5).

Позже, в работе [27], исследовалось линейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} t^k(\alpha_k t^{-1} + \beta_k t)\, y^{(k)}(t) = h(t)\ ,\ \ t\ >\ 0,$$

где изучены вопросы существования решения в пространстве

$$S = \left\{y:\ y^{(k)}(t)t^{k-1/2} \in L_2(0,+\infty)\ ,\ k=\overline{0,n}\right\}\ ,$$

как дифференциального уравнения конечного порядка $(n < +\infty)$, так и бесконечного $(n = +\infty)$. Для обоих случаев исходная задача сводится к ЗК, для которой подсчитывается индекс, устанавливаются условия разрешимости и предлагается способ конструктивного построения решения.

Естественным обобщением уравнения (1.1.5) является уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} t^k (\sum_{m=-l}^{l} \alpha_{k,m} t^m) y^{(k)}(t) = h(t)\ ,\ t\ \geq\ 0\ , \tag{1.1.6}$$

где $\alpha_{k,m} \in \mathcal{C},\ k = \overline{0,n},\ m = \overline{-l,l},\ 1 \leq n < \infty.$

Методика исследования уравнения (1.1.6), также как и для уравнения типа (1.1.5) следующая: сначала делается замена $t = e^x$, а затем используется интегральное преобразование Фурье и его свойства, связанные с аналитическим продолжением образа Фурье (искомой функции) в полосу. В результате получается многоэлементная ЗК для полосы.

К многоэлементной ЗК для полосы сводится и класс ЛДУ n-го порядка с экспоненциальными коэффициентами вида

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{m=-l}^{l} \alpha_{k,m} e^{-mx} f^{(k)}(x)\ =\ h(x)\ ,\ x \in \mathcal{R}\ . \tag{1.1.7}$$

Класс дифференциальных уравнений типа (1.1.6), (1.1.7) является весьма важным. Поиски методов их решения наблюдались раннее (например, в работе [55]) и наблюдаются в настоящее время (например, [53]).

В работе [55] исследовалось линейное дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k + \beta_k e^{\gamma x})\, y^{(k)}(x)\ =\ 0\ ,$$

где α_k , β_k , $k = \overline{0,n}$, γ и независимая переменная x принадлежат пространству $\mathcal{R}$, решения $y(x)$ может быть комплекснозначными. В указанной работе доказано, что решения могут быть выражены через стандартные обобщённые гипергеометрические функции при определенных условиях, накладываемых на коэффициенты α_k , β_k. Несмотря на полученные в работе [55] результаты, предложенный метод имеет ряд недостатков, связанных с жесткими ограничениями, накладываемыми на коэффициенты и, в конечном итоге, громоздкостью вычислительного процесса.

В работе [53] для уравнения вида $y^{(n)}(x) = ax^{\beta}y + f(x),\ (0 \le c < x < d,$ $d \le a,\ a \ne 0,\ \beta \in \mathcal{R})$ строятся явные решения в терминах специальных функций типа Миттаг-Лефлера. На более общие случаи ЛДУ n-го порядка метод, предложенный в работе [53], не распространяется.

Отметим, что качественные исследования ЛДУ n -го порядка приведены в работе [21,стр.92].

В связи с вышеизложенным возникло **первое направление** исследования в диссертационной работе, связанное с изучением многоэлементной ЗК для полосы с её применением к решению линейных дифференциальных уравнений типа (1.1.6), (1.1.7) и некоторых классов дифференциальных уравнений в частных производных, описанных Ю.И. Черским в работе [12].

Сделаем теперь обзор работ, в которых рассмотренны задачи, сводящиеся к ЗК в кольце. В работе [12,стр.246] рассмотрена дискретная задача:

$$u_{n+1}(y) - 2u_n(y) + u_{n-1}(y) + \frac{d^2}{dy^2}u_n(y) = 0\ ,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

с граничными условиями

$$u_n(1-0) = 0\ ,\quad u_n(+0) + \sigma(n)\frac{d}{dy}u_n = g_n,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\ ,$$

где $\sigma(n) = \frac{\alpha r^n + \beta}{\gamma r^n + \delta}$, $r,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ – известны, $0 < r < 1$, g_n - заданная в l_2 последовательность. Эта задача была сведена к ЗК в кольце

$$\Phi(t) = -A(t)\Phi(rt) + \Omega(t),\quad |t| = 1, \tag{1.1.8}$$

где $\Omega(t) \in L_2(|t| = 1)$, $A(t)$ - заданная функция, не имеющая нулей и разлагающаяся в абсолютно сходящийся ряд. Также было указано конструктивное решение ЗК в кольце (1.1.8) для любого индекса. Значительно позже, в случае нулевого индекса, в работе [19] был предложен другой способ её решения.

В работе [34] реализована схема построения точного решения ЗК в кольце, предложенная ранее Ю.И. Черским. В работе [34] также получено интегральное представление аналитической функции в кольце

$$\Phi(z) = \frac{K'}{2\pi lnR} \int\limits_{|\tau|=1} dn\frac{K'}{lnR}\left(-iln\frac{z}{\tau}\right)\frac{\varphi(\tau)\ d\tau}{\tau}\ ,$$

где $\varphi(t)$ - произвольная функция из пространства $L_2(|t|=1)$.

Следует отметить, что ранее в работе П.В. Керекеши [24] было получено интегральное представление аналитической периодической функции в полосе.

Как отмечалось во введении, исследованиям ЗК в кольце посвящено очень малое количество работ [19,30,34,58]. Многое предстоит ещё сделать. Существенным вкладом в развитие ЗК в кольце стала работа П.В. Керекеши и С.Ю. Хачатурова [30], в которой получено точное решение ЗК в кольце для двух пар функций. Но такие вопросы как: 1) описание класса линейных дифференциально разностных уравнений, сводящихся к многоэлементной матричной ЗК в кольце; 2) существование и единственность решения многоэлементной ЗК в кольце; 3) разработка методов построения приближённого решения многоэлементной ЗК в кольце, остаются открытыми.

Этот факт определил **второе направление** исследований, связанных с многоэлементной ЗК в кольце и её приложение к решению класса дифференциально - разностных уравнений вида

$$\sum_{p=0}^{A}\sum_{q=0}^{B} a_{pq}(y) \sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+p/2-j}(y)}{dy^q} = g_n(y)\,,\ n=0,\pm1,\pm2,\dots\ , \qquad (1.1.9)$$

где $A, B \in \mathcal{N},\ \mathcal{A}{+}\mathcal{B}$ - порядок дифференциально - разностного уравнения, $a_{pq}(y)\,,\ g_n(y)$ – заданные функции, $u_n(y)$ – искомая функция.

Третье направление исследований связано с конструктивным построением решений класса линейных однородных дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами вида

$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k e^{i\gamma x}+\beta_k e^{-i\gamma x})y^{(k)}(x)=0\ ,\ x\in\mathcal{R}\ , \tag{1.1.10}$$

где $\alpha_k,\ \beta_k\in\mathcal{C},\ k=\overline{0,n},\ \gamma\in\mathcal{R},\ \gamma>0$. Неизвестная функция $y(x)$ ищется из пространства обобщённых функций $L_2\{0,n\}$.

Следует отметить, что интерес к дифференциальным уравнениям с осциллирующими коэффициентами проявляется и в последние десятилетия [5,7, 15,54,69].

Метод сопряжения, связанный с решением ЗК довольно обширен. Он применим так же и при решении бесконечных систем алгебраических уравнений типа свёртки, которые, в свою очередь, являются средством решения дифференциальных уравнений.

Исследования бесконечных систем линейных алгебраических уравнений с разностными индексами проводились в работах [6,50-52]. В работе [12,стр.240] рассмотрена бесконечная система плавного перехода

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_{n-k}x_k-c_n+r^n\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}b_{n-k}x_k-c_n\right)=0,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{1.1.11}$$

и высказано утверждение, что она приводится к ЗК с искомой аналитической функцией в концентрическом кольце.

Таким образом, образовалось **четвёртое направление** исследований в диссертационной работе, связанное с обобщением бесконечной системы плавного перехода. Обобщение направлено на рассмотрение двух бесконечных систем плавного перехода, представленное в работе [30].

Резюме.

Как видно из вышеизложенного, теория ЗК является актуальным и достаточно эффективным направлением при решении дифференциальных уравнений. Круг задач, рассмотренных в диссертационной работе, и полученные результаты расширяют область применения ЗК и укрепляют актуальность тематики.

РАЗДЕЛ 2
ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА В ПОЛОСЕ И В КОЛЬЦЕ

При решении поставленных задач используется метод сопряжения теории аналитических функций (метод связанный с исследованием ЗК). В диссертации используются результаты, полученные при исследовании ЗК в полосе, которые изложены в работах [12,13,22,24-26].

Методика решения основана на применении аппарата преобразования Фурье [12,стр.10], Лорана [12,стр.223] и преобразования Фурье в пространтсве обощённых функций [12,стр.266]. Терминология и обозначения используются такие же, как в работе [12]. Остальные понятия и определения вводятся по мере необходимости в тексте.

Далее в настоящей главе изложены новые материалы, посвященные ЗК в кольце и многоэлементной ЗК в полосе.

2.1. О существовании решения задачи Карлемана с радиальным сдвигом во внутрь области

Определение 2.1. [20] *Символом* $L_2\,(|\,t\,|\,=\,1)$ *обозначим пространство функций* $\Phi\,(\,t\,)$, *заданных на* $|\,t\,|=1$ *и удовлетворяющих условию*

$$\frac{1}{2\,\pi\,i}\int\limits_{|t|=1}|\,\Phi\,(\,t\,)\,|^{\,2}\,\frac{d\,t}{t}\,<\,+\infty.$$

Определение 2.2. [12,стр.222] *Соотношения*

$$A(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kt^k,\quad |t|=1\qquad,\qquad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{A(t)}{t^{n+1}}dt$$

определяют преобразование Лорана, соответственно прямое и обратное. Символически будем обозначать их так $A(t)=La,\ a_n=L^{-1}A.$

Определение 2.3. [34] *Функция $A(t)$ принадлежит пространству Винера W, если* $L^{-1}A(t)\,=\,a_n$, $a_n\in l_1$, *где* L^{-1} *- обратный оператор Лорана .*

Определение 2.4. [34] *Обозначим через* $\{r, R\}$ *пространство последовательностей* $\{\Phi_n\}$ *таких, что* $(r^n + R^n)\Phi_n \in l_2$, $n \in \mathcal{Z}$.

Определение 2.5. [34] *Обозначим через* $\{\{r, R\}\}$ *пространство аналитических в кольце* $r < |z| < R$ *функций* $\Phi(z)$, *для каждой из которых существует постоянная* C, *такая, что для всех* $\rho \in (r, R)$ *выполняется:*

$$\int\limits_0^{2\pi} \left|\Phi(\rho e^{i\alpha})\right|^2 \, d\alpha \, < \, C \, .$$

Изучается задача Карлемана для кольца

$$A(t)\Phi(Rt) + B(t)\Phi(R^{-1}t) + C(t)\Phi(t) = G(t), \ \ |t| = 1, \qquad (2.1.1)$$

где $A(t), \ B(t), \ C(t), \ |t| = 1$ - известные функции, принадлежащие пространству W, а $G(t)$ - известная функция из $L_2(|t| = 1)$, ищется неизвестная функция $\Phi(z)$ из пространства $\{\{R^{-1}, R\}\}, \ 1 < R < \infty$.

Итак, используя интегральное представление аналитической функции в кольце [34], задача Карлемана (2.1.1) в смысле разрешимости эквивалентна интегральному уравнению

$$(A(t) + B(t))\frac{\varphi(t)}{2} + (A(t) - B(t))\frac{K'}{2\pi ln\, R}\int\limits_{|\tau|=1} cs\frac{K'}{ln\, R}\left(-i\, ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau +$$

$$+C(t)\frac{K'}{2\pi ln\, R}\int\limits_{|\tau|=1} dn\frac{K'}{ln\, R}\left(-i\, ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau = G(t)\ , \ \ |t| = 1\ , \qquad (2.1.2)$$

где $dnz, \, csz$ – двоякопериодические функции Якоби, $K \ K'$ – действительный и мнимый четверть периоды, причем они связаны соотношением

$$\frac{K}{K'} = \frac{\pi}{ln\, R}\, ,$$

$\varphi(t)$ - искомая функция, принадлежащая пространству $L_2(|t| = 1)$.

Сделаем замену $t = e^{i\alpha}, \ \tau = e^{i\theta}$, тогда интегральное уравнение (2.1.2) примет вид

$$P_0(\alpha)\, \varphi_0(\alpha) \ + \ S_0(\alpha)\, \frac{K'}{2\pi ln\, R}\int\limits_0^{2\pi} cs\frac{K'}{ln\, R}\, (\alpha - \theta)\, \varphi_0(\theta) d\theta \, +$$

$$+ C_0(\alpha)\frac{K'}{2\pi ln\,R}\int\limits_0^{2\pi} dn\frac{K'}{ln\,R}\,(\alpha-\theta)\,\varphi_0(\theta)d\theta = G_0(\alpha), \qquad 0\le\alpha\le 2\pi\,, \qquad (2.1.3)$$

где

$$\varphi_0(\alpha)=\varphi(e^{i\alpha})\ \ ,\ \ G_0(\alpha)=G(e^{i\alpha})\ \ ,\ \ P_0(\alpha)=\frac{1}{2}\left(A(e^{i\alpha})+B(e^{i\alpha})\right)\,,$$

$$S_0(\alpha)=A(e^{i\alpha})-B(e^{i\alpha})\ \ ,\ \ C_0(\alpha)=C(e^{i\alpha})\ .$$

Рассмотрим симметричный случай.

Пусть в (2.1.2) $A(t)\equiv B(t),\ |t|=1,$ тогда из (2.1.3) получим

$$\varphi_0(\alpha)=\left(S\varphi_0\right)(\alpha)=-E(\alpha)\frac{K'}{2\pi ln\,R}\int\limits_0^{2\pi} dn\frac{K'}{ln\,R}\,(\alpha-\theta)\,\varphi_0(\theta)d\theta+H(\alpha)\ ,$$

$$0\le\alpha\le 2\pi\ , \qquad (2.1.4)$$

где

$$E(\alpha)=\frac{C_0(\alpha)}{P_0(\alpha)}\ ,\quad H(\alpha)=\frac{G_0(\alpha)}{P_0(\alpha)}\ ,$$

через S вводится линейный оператор, действующий из $L_2([0,2\pi])$ в пространство $L_2([0,2\pi])$. Справедлива следующая

Теорема 2.1. *Пусть оператор S действует из* $L_2([0,2\pi])$ *в* $L_2([0,2\pi])$ *и пусть* $\gamma=\max\limits_{\alpha\in[0,2\pi]}|E(\alpha)|<1,$ *тогда (2.1.4) в классе* $L_2([0,2\pi])$ *имеет решение, причем единственное.*

Доказательство. Так как задача Карлемана (2.1.1) эквивалентна интегральному уравнению (2.1.4), то они одновременно разрешимы или нет. К (2.1.4) применим принцип сжатых отображений в пространстве $L_2([0,2\pi])$.

$$\|S(\varphi_0-\varphi_1)\|=\left(\int\limits_0^{2\pi}\left|E(\alpha)\frac{K'}{2\pi ln\,R}\int\limits_0^{2\pi} dn\frac{K'}{ln\,R}\,(\alpha-\theta)\,(\varphi_0(\theta)-\varphi_1(\theta))d\theta\right|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\gamma\left(\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{K'}{2\pi ln\,R}\int\limits_0^{2\pi} dn\frac{K'}{ln\,R}\,(\alpha-\theta)\,(\varphi_0(\theta)-\varphi_1(\theta))d\theta\right|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.1.5)$$

Введем функцию

$$\Psi(\alpha)=\frac{K'}{2\pi ln\,R}\int\limits_0^{2\pi} dn\frac{K'}{ln\,R}(\alpha-\theta)(\varphi_0(\theta)-\varphi_1(\theta))d\theta\ ,\quad 0\le\alpha\le 2\pi$$

и применим обратное дискретное преобразование Фурье

$$\psi_n = W^{-1}(\Psi(\alpha)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Psi(\alpha)e^{-in\alpha}d\alpha\,.$$

Используя формулу свертки изображений [12,стр.233], получим

$$\psi_n = \frac{R^n}{1+R^{2n}}(\varphi_{0,n}-\varphi_{1,n})\,.$$

Далее нам потребуется равенство Парсеваля .

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\Psi(\alpha)|^2d\alpha = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|\psi_n|^2\,.$$

Итак, из (2.1.5) получаем

$$\|S(\varphi_0-\varphi_1)\| = \gamma\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{R^n}{1+R^{2n}}(\varphi_{0,n}-\varphi_{1,n})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \gamma\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\varphi_{0,n}-\varphi_{1,n}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \gamma\|\varphi_0(\alpha)-\varphi_1(\alpha)\|\,. \qquad (2.1.6)$$

Из системы неравенств (2.1.5), (2.1.6) следует, что если $\gamma < 1$, то оператор S является оператором сжатия и следовательно, на основании теоремы (Банаха) [39,стр.60] уравнение (2.1.4), а вместе с ней и задача (2.1.1) в пространстве $L_2([0,2\pi])$ имеет единственное решение. Решение может быть получено методом последовательных приближений. **Теорема доказана.**

Теперь рассмотрим общий случай $(A(t)\neq B(t),\ |t|=1)$.

Для упрощения решения проблемы предположим, что $A(t),\ B(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера. Учитывая разложение в ряд функций Якоби $dnz,\ csz$ [1,стр.388].

$$\frac{K'}{\ln R}cs\frac{K'}{\ln R}z = \frac{1}{2}ctg\frac{z}{2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{R^{2n}+1}\sin zn\ ,$$

$$\frac{K'}{\ln R}dn\frac{K'}{\ln R}z = \frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^n}{R^{2n}+1}\cos zn\ ,$$

из уравнения (2.1.3) получим полное особое интегральное уравнение с ядром Гильберта

$$P_0(\alpha)\,\varphi_0(\alpha) - Q_0(\alpha)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}ctg\frac{\theta-\alpha}{2}\varphi_0(\theta)d\theta + \int\limits_0^{2\pi}K(\alpha,\theta)\ ,\varphi_0(\theta)d\theta = G_0(\alpha)\ ,$$

$$0 \le \alpha \le 2\pi \;, \tag{2.1.7}$$

$$Q_0(\alpha) = \frac{1}{2}S_0(\alpha) \;, \quad K(\alpha,\theta) = \frac{1}{2\pi}\left\{C_0(\alpha)\,\left(\frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^n}{R^{2n}+1}\,cos(\alpha-\theta)n\right) - \right.$$

$$\left. - \,S_0(\alpha)\,2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{R^{2n}+1}\,sin(\alpha-\theta)n\right\} \;.$$

Очевидно, что функции $P_0(\alpha)\,,\, S_0(\alpha)\,,\, G_0(\alpha)$ и ядро $K(\alpha,\theta)$ удовлетворяет условию Гёльдера.

Исследование уравнения (2.1.7) производится путем регуляризации характеристического уравнения способом Карлемана-Векуа, предложенным и полностью описанным в работе [11,стр.212].

Здесь ограничимся лишь основными результатами.

Введем индекс интегрального уравнения (2.1.7), определяемый по формуле

$$æ = Ind[P_0(\alpha) + iQ_0(\alpha)] = Ind[\frac{1}{2}(A_0(\alpha)(1+i) + B_0(\alpha)(1+i))] \;\; .$$

Далее рассмотрим различные случаи:

1) $æ = 0$. В результате регуляризации получаем интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$\varphi_0(\alpha) + \int_0^{2\pi} R(\alpha,\theta)\varphi_0(\theta)d\theta = f(\alpha), \quad 0 \le \alpha \le 2\pi \;, \tag{2.1.8}$$

где $R(\alpha,\theta)$ –фредгольмово ядро,

$$R(\alpha,\theta) = \eta(\alpha)e^{w_1(\alpha)}K(\alpha,\theta) \;-\; \xi(\alpha)\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{w_1(\sigma)}ctg\frac{\sigma-\alpha}{2}K(\sigma,\theta)d\sigma \;\;, \tag{2.1.9}$$

$f(\alpha)$ - свободный член,

$$f(\alpha) = \beta_0\xi(\alpha) \,+\, \eta(\alpha)e^{w_1(\alpha)} \;-\; \xi(\alpha)\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_0(\theta)e^{w_1(\theta)}ctg\frac{\theta-\alpha}{2}d\theta \;\;,$$

$$\eta = e^{-w_1(\alpha)}cosw(\alpha) \;\;,\;\; \xi = -e^{-w_1(\alpha)}sinw(\alpha) \;\;,$$

$$w(\alpha) = arctg\frac{Q_0(\alpha)}{P_0(\alpha)} \;\;,\;\; e^{-w_1(\alpha)} = p(\alpha)\sqrt{Q_0^2(\alpha) + P_0^2(\alpha)} \;\;,$$

$p(\alpha)$ - регуляризующий множитель.

Должно иметь место также условие разрешимости

$$\beta_0 \int_0^{2\pi} \eta(\theta) d\theta \; + \; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\theta) d\theta \; \int_0^{2\pi} G_0(\theta) e^{w_1(\theta)} d\theta \; -$$

$$- \; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\theta) d\theta \; \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^{w_1(\theta)} K(\theta, \sigma) d\theta \right) \varphi_0(\sigma) \, d\sigma \;\; = \;\; 0 \quad .$$

2) При $æ \neq 0$ регуляризующий множитель будет иметь вид:

$$p(\alpha) = \frac{|t|^{æ} e^{-w_1(\alpha)}}{\sqrt{P_0^2(\alpha) + Q_0^2(\alpha)}} \;\; , \;\; w(\alpha) = arctg \frac{Q_0(\alpha)}{P_0(\alpha)} \; - \; æ arg t \;\; ,$$

$$\eta = t^{æ} e^{-w_1(\alpha)} cos w(\alpha) \;\; , \;\; \xi = -t^{æ} e^{-w_1(\alpha)} sin w(\alpha) \;\; .$$

2a) при $æ > 0$, после аналогичных выкладок, получаем: интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода (2.1.8) с ядром (2.1.9), где свободный член имеет вид

$$f(\alpha) = \eta(\alpha) G_0(\alpha) e^{w_1(\alpha)} \; - \; \xi(\alpha) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_0(\theta) e^{w_1(\theta)} ctg \frac{\theta - \alpha}{2} d\theta \; +$$

$$+ \; \xi(\alpha) \left[\beta_0 + 2 \sum_{k=1}^{æ} (\; \alpha_k \sin k\alpha + \beta_k \cos k\alpha \;) \right] \quad .$$

Дополнительное условие таково:

$$a_{æ} \int_0^{2\pi} \eta(\theta) sin \, æ\theta d\theta \; + \; b_{æ} \int_0^{2\pi} \eta(\theta) cos \, æ\theta d\theta \; + \; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\theta) d\theta \; \int_0^{2\pi} G_0(\theta) e^{w_1(\theta)} d\theta \; -$$

$$- \; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\theta) d\theta \; \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^{w_1(\theta)} K(\theta, \sigma) d\theta \right) \varphi_0(\sigma) \, d\sigma \;\; = \;\; 0 \quad .$$

2b) В случае $æ < 0$ ядро и свободный член сохранятся как в 2a), а дополнительные условия примут следующий вид:

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \left(G_0(\theta) \; - \; \int_0^{2\pi} K(\theta, \sigma) \, \varphi_0(\sigma) \, d\sigma \right) \, e^{w_1(\theta)} \;\; \cos k\theta d\theta \;\; = \;\; 0 \\ \int_0^{2\pi} \left(G_0(\theta) \; - \; \int_0^{2\pi} K(\theta, \sigma) \, \varphi_0(\sigma) \, d\sigma \right) \, e^{w_1(\theta)} \;\; \sin k\theta d\theta \;\; = \;\; 0 \\ \qquad k = 0, 1, \ldots, -æ - 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(G_0(\theta) \; - \; \int_0^{2\pi} K(\theta, \sigma) \, \varphi_0(\sigma) \, d\sigma \right) \, \xi(\alpha) \, e^{w_1(\theta)} \;\; \sin æ(\theta - \alpha) d\alpha d\theta \;\; = \;\; 0 \;\; .$$

Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма

$$T\varphi = \int_0^{2\pi} R(\alpha,\theta)\varphi(\theta)d\theta. \tag{2.1.10}$$

Так как ядро $R(\alpha,\theta)$ – интегрируемо с квадратом

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R^2(\alpha,\theta)d\alpha d\theta = M^2 < +\infty,$$

тогда, по теореме (Фубини) (см.[46]), оно принадлежит $L_2([0,2\pi]\times[0,2\pi])$. Значит, интеграл (2.1.10) существует для любой функции $\varphi_0(\alpha)$ и, нетрудно показать, что он так же принадлежит пространству $L_2([0,2\pi])$. Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем $\|T\varphi_0\| \le M\|\varphi_0\|$. Таким образом, оператор T, определяемый формулой (2.1.10), есть линейный, непрерывный и, согласно теореме 2 [39,стр.89], ограниченный. Кроме того, предположим, что $M < 1$. Тогда по теореме 3 [39,стр.96] уравнение (2.1.8) с учетом (2.1.10) можно записать в виде

$$(I-T)\varphi_0 = f\ ,$$

где I– единичный оператор, и уравнение (2.1.8) имеет единственное решение, определяемое рядом Неймана

$$\varphi_0 = (I+T)^{-1} = f + Tf + T^2 f + \cdots + T^n f + \cdots\ .$$

Причем

$$(T^n f)(\alpha) = \int_0^{2\pi} R_n(\alpha,\theta)f(\theta)d\theta,$$

где $R_n(\alpha,\theta)$ –n-я итерация ядра $R(\alpha,\theta)$, определяемая формулой

$$R_n(\alpha,\theta) = \int_0^{2\pi} R(\alpha,\tau)R_{n-1}(\tau,\theta)d\tau\ .$$

2.2. О существовании решения задачи Карлемана в кольце для двух пар функций

2.2.1. Постановка задачи Карлемана в кольце для двух пар функций.

Постановка ЗК состоит в нахождении двух аналитических в кольце функций $\Phi(z)$ $\Psi(z)$, удовлетворяющих на границе кольца $R^{-1} < |t| < R$, $1 < R < \infty$ следующим условиям:

$$\begin{cases} \Phi(R^{-1}t) + A(t)\Psi(Rt) = G_1(t) \\ \Phi(Rt) + B(t)\Psi(R^{-1}t) = G_2(t) \quad , \ |t| = 1 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

где функции $G_1(t)$ $G_2(t)$ заданы и принадлежат $L_2(|t| = 1)$, известные функции A(t) и B(t) отличны от нуля на окружности $|t| = 1$ (нормальный случай) и принадлежат пространству Винера W.

2.2.2. Задача Карлемана о " скачке ".

Требуется найти функции $\Phi(z) \in \{\{R^{-1}, R\}\}$, $\Psi(z) \in \{\{R^{-1}, R\}\}$ из системы

$$\begin{cases} \Phi(R^{-1}t) + \lambda\Psi(Rt) = H_1(t) \\ \Phi(Rt) + \mu\Psi(R^{-1}t) = H_2(t) \quad , \ |t| = 1 \ , \end{cases} \tag{2.2.2}$$

где $\lambda, \ \mu$ – заданные постоянные, функции $H_1(t)$ $H_2(t)$ известны и $H_1(t) \in L_2(|t| = 1)$, $H_2(t) \in L_2(|t| = 1)$

Функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ будем искать в виде ряда Лорана

$$\Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n t^n \ ; \ \Psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_n t^n \ . \tag{2.2.3}$$

При этом система (2.2.2) будет эквивалентна следующей бесконечной системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} R^{-n}\varphi_n + \lambda R^n \psi_n = h_{1n} \\ R^n \varphi_n + \mu R^{-n}\psi_n = h_{2n} \\ \quad n \in \mathcal{Z}. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Для каждого фиксированного $n \in \mathcal{Z}$ определитель системы (2.2.4) имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R^{-n} & \lambda R^{n} \\ R^{n} & \mu R^{-n} \end{vmatrix} = \mu R^{-2n} - \lambda R^{2n} \ .$$

При этом возможны варианты:

а) $\Delta \neq 0$, $\forall n \in \mathcal{Z}$, тогда

$$\varphi_n = \frac{\mu h_{1n} R^{-n} - \lambda h_{2n} R^{n}}{\Delta} \quad ; \qquad \psi_n = \frac{h_{2n} R^{-n} - h_{1n} R^{n}}{\Delta}.$$

ЗК в этом случае имеет единственное и безусловное решение, т.е. решение, не требующее дополнительных ограничений (условий разрешимости). Введем последовательности $\omega_n^{(1)} = R^{-n}/\Delta$, $\omega_n^{(2)} = R^{n}/\Delta$ и обозначим

$$L\omega_n^{(1)} = \Omega^{(1)} \ ; \ L\omega_n^{(2)} = \Omega^{(2)} \ .$$

Тогда решение задачи (2.2.2) можно записать в виде сверток [12,стр.238]:

$$\Phi(t) = \frac{\mu}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(1)} \left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_1(\tau)}{\tau} \, d\tau - \frac{\lambda}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)} \left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)}{\tau} \, d\tau. \qquad (2.2.5)$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(1)} \left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_1(\tau)}{\tau} \, d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)} \left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)}{\tau} \, d\tau \ . \qquad (2.2.6)$$

б) если $\Delta = 0$, тогда

$$\overline{n} = \begin{cases} 0 \ , & \lambda = \mu \\ \nu \ , \ \nu = (ln\mu - ln\lambda)/4lnR \ , & \lambda \neq \mu \ , \ \nu \in \mathcal{Z}. \end{cases}$$

В этом случае для разрешимости (2.2.4) необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu h_{1\overline{n}} R^{-\overline{n}} - \lambda h_{2\overline{n}} R^{\overline{n}} = 0 \ ; \ h_{2\overline{n}} R^{-\overline{n}} - h_{1\overline{n}} R^{\overline{n}} = 0$$

или, что то же самое

$$\int\limits_{|\tau|=1} \frac{H_1(\tau)}{\tau} \, d\tau = \int\limits_{|\tau|=1} \frac{H_2(\tau)}{\tau} \, d\tau \ , \ \overline{n} = 0 \, . \qquad (2.2.7)$$

$$\mu \int\limits_{|\tau|=1} \frac{H_1(\tau)}{\tau^{\nu+1}} \, d\tau = \lambda R^{2\nu} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{H_2(\tau)}{\tau^{\nu+1}} \, d\tau \ , \ \overline{n} = \nu \, . \qquad (2.2.8)$$

Если условия (2.2.7), (2.2.8) выполняются, то

$$\varphi_n = \begin{cases} (\mu h_{1n} R^{-n} \; - \; \lambda h_{2n} R^n)/\Delta \quad , \quad n \neq \overline{n} \\ \qquad C_1 = const \qquad\qquad , \quad n = \overline{n} \; , \end{cases}$$

$$\psi_n = \begin{cases} (h_{2n} R^{-n} \; - \; h_{1n} R^n)/\Delta \quad , \quad n \neq \overline{n} \\ \qquad C_2 = const \qquad\qquad , \quad n = \overline{n} \; . \end{cases}$$

Введем последовательности

$$\omega_n^{(1)} = \begin{cases} R^{-n}/\Delta \;\; , \;\; n \neq \overline{n} \\ \quad 0 \qquad , \;\; n = \overline{n} \end{cases} \quad ; \quad \omega_n^{(2)} = \begin{cases} R^{n}/\Delta \quad , \quad n \neq \overline{n} \\ \quad 0 \qquad , \;\; n = \overline{n} \; . \end{cases}$$

Соответствующие преобразования Лорана обозначим через $\Omega_{\overline{n}}^{(1)}$, $\Omega_{\overline{n}}^{(2)}$.

Тогда решение ЗК (2.2.2) примет вид :

$$\Phi(t) \; = \; C_1 t^{\overline{n}} \; + \; \frac{\mu}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega_{\overline{n}}^{(1)} \left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_1(\tau)}{\tau} \, d\tau \; - \; \frac{\lambda}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega_{\overline{n}}^{(2)} \left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)}{\tau} \, d\tau \tag{2.2.9}$$

$$\Psi(t) \; = \; C_2 t^{\overline{n}} \; + \; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega_{\overline{n}}^{(1)} \left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_1(\tau)}{\tau} \, d\tau \; - \; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega_{\overline{n}}^{(2)} \left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)}{\tau} \, d\tau \; , \tag{2.2.10}$$

где $C_1, \; C_2$ – произвольные комплексные постоянные.

Итак, в случае б) для разрешимости системы (2.2.4) необходимо и достаточно выполнение условий (2.2.7), (2.2.8). Если они выполнены, то решение системы (2.2.4) существует и зависит от двух произвольных комплексных постоянных.

2.2.3. Факторизация при нулевом индексе.

Пусть $A_0(t) \in W, \; B_0(t) \in W, \; A_0(t) \neq 0, \; B_0(t) \neq 0, \; |t| = 1.$

Факторизацию функций $A_0(t), B_0(t)$ проводим следующим приемом

$$A_0(t) \; = \; \lambda_0 \, \frac{X_1(R^{-1}t)}{X_2(Rt)} \quad ; \quad B_0(t) \; = \; \mu_0 \, \frac{X_1(Rt)}{X_2(R^{-1}t)} \quad , \tag{2.2.11}$$

где $X_1(t), X_2(t)$ - искомые, аналитические в кольце $R^{-1} < |t| < R$ функции, не имеющие нулей в замкнутом кольце $R^{-1} \leq |t| \leq R$, кроме того, $X_1(t) \in W$, $X_2(t) \in W$, а $\lambda_0, \, \mu_0$ - искомые комплексные постоянные.

Прологарифмировав (2.2.11), получим:

$$\begin{aligned} lnA_0(t) &= lnX_1(R^{-1}t) - lnX_2(Rt) + ln\lambda_0 \\ lnB_0(t) &= lnX_1(Rt) - lnX_2(R^{-1}t) + ln\mu_0 \end{aligned} \quad , \tag{2.2.12}$$

где $lnA_0(t)$ - фиксированная ветвь $LnA_0(t)$, а $lnB_0(t) - LnB_0(t)$. Приведем без доказательства одно из свойств пространства Винера W.

Лемма 2.1. [34] *Пусть* $h(t) \in W$, $h(t) \neq 0$, $Indh(t) = 0$, *тогда при подходящем выборе ветви логарифма* $lnh(t) \in W$.

Задача факторизации $A_0(t),\ B_0(t)$ свелась к задаче (2.2.2), где

$$H_1(t) = lnA_0(t) - ln\lambda_0\ ,\ H_2(t) = lnB_0(t) - ln\mu_0\ ,\ \lambda = \mu = -1\, ,\ |t| = 1\ ,$$

$$H_1(t) = lnA_0(t) - ln\lambda_0\ \ ,\ \ \Psi(t) = lnX_2(t)\ ,\ |t| = 1\ . \tag{2.2.13}$$

Здесь мы имеем случай б) пункта 2.2.2., причем $\overline{n} = 0$.

Учитывая условия разрешимости (2.2.7), получим

$$\int\limits_{|\tau|=1} \frac{lnA_0(\tau) - ln\lambda_0}{\tau}\, d\tau = \int\limits_{|\tau|=1} \frac{lnB_0(\tau) - ln\mu_0}{\tau}\, d\tau = C\, , \tag{2.2.14}$$

где $C = const$.

Не нарушая общности, положим C=0. Тогда из (2.2.14) находим

$$\lambda_0 = exp\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{lnA_0(\tau)}{\tau}\, d\tau \right\} . \tag{2.2.15}$$

$$\mu_0 = exp\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{lnB_0(\tau)}{\tau}\, d\tau \right\} . \tag{2.2.16}$$

При этом $X_1(t)$ и $X_2(t)$ определяются из (2.2.9), (2.2.10)

$$X_1(t) = exp\left\{ C_1 - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{lnA_0(\tau) - ln\lambda_0}{\tau} d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{lnB_0(\tau) - ln\mu_0}{\tau} d\tau \right\} . \tag{2.2.17}$$

$$X_2(t) = exp\left\{C_2 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{lnA_0(\tau) - ln\lambda_0}{\tau}d\tau -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{lnB_0(\tau) - ln\mu_0}{\tau}d\tau\right\}. \qquad (2.2.18)$$

2.2.4. Факторизация при любом индексе.

Пусть $A(t) \in W,\ B(t) \in W,\ A(t) \neq 0,\ B(t) \neq 0,\ |t| = 1.$

$$Ind\, A(t) = æ_1 \quad , \quad Ind\, B(t) = æ_2 \quad .$$

Выбираем произвольное комплексное число a такое, что $R^{-1} < |a| < 1$, тогда:

$$Ind\left\{\frac{R^{-1}t - a}{Rt - a}\right\}^{æ} = æ$$

и функции

$$A_0(t) = A(t)\left(\frac{R^{-1}t - a}{Rt - a}\right)^{-æ_1} \quad , \quad B_0(t) = B(t)\left(\frac{R^{-1}t - a}{Rt - a}\right)^{-æ_2} \quad ,$$

удовлетворяют условиям пункта 2.2.3.. Следовательно

$$A(t) = \lambda_0\left(\frac{R^{-1}t - a}{Rt - a}\right)^{æ_1}\frac{X_1(R^{-1}t)}{X_2(Rt)} \quad , \qquad (2.2.19)$$

$$B(t) = \mu_0\left(\frac{R^{-1}t - a}{Rt - a}\right)^{æ_2}\frac{X_1(Rt)}{X_2(R^{-1}t)} \quad , \qquad (2.2.20)$$

где λ_0, μ_0 определяются по формулам (2.2.15), (2.2.16), а $X_1(t), X_2(t)$ по (2.2.17) и (2.2.18) соответственно.

2.2.5. Задача Карлемана (2.2.1) с ограничением $æ = æ_1 = -æ_2$.

Используя факторизацию функций $A(t),\ B(t)$ (см.п. 2.2.4.), условия (2.2.1) запишутся в виде системы (2.2.2):

$$\frac{\Phi(R^{-1}t)}{(R^{-1}t - a)^{æ}X_1(R^{-1}t)} + \lambda_0\frac{\Psi(Rt)}{(Rt - a)^{æ}X_2(Rt)} = \frac{H_1(t)}{(R^{-1}t - a)^{æ}X_1(R^{-1}t)}\ ,$$

$$\frac{\Phi(Rt)}{(Rt - a)^{æ}X_1(Rt)} + \mu_0\frac{\Psi(R^{-1}t)}{(R^{-1}t - a)^{æ}X_2(R^{-1}t)} = \frac{H_2(t)}{(Rt - a)^{æ}X_1(Rt)}\ ,\ |t| = 1. \qquad (2.2.21)$$

Постоянные λ_0, μ_0 определяются по схеме пункта 2.2.3. и с учетом формул (2.2.19), (2.2.20) запишем так:

$$\lambda_0 = exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} ln\left[\left(\frac{R^{-1}\tau-a}{R\tau-a}\right)^{æ_2} A_0(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau}\right). \tag{2.2.22}$$

$$\mu_0 = exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} ln\left[\left(\frac{R\tau-a}{R^{-1}\tau-a}\right)^{æ_2} B_0(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau}\right). \tag{2.2.23}$$

Положим $\Delta' = \mu_0 R^{-2n} - \lambda_0 R^{2n}$. Рассмотрим случаи:

а) $æ = 0$. Если $\Delta' \neq 0$, то существует единственное и безусловное решение:

$$\Phi(t) = \mu_0\frac{X_1(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)}\frac{d\tau}{\tau} - \lambda_0\frac{X_1(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)}\frac{d\tau}{\tau}. \tag{2.2.24}$$

$$\Psi(t) = \frac{X_2(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)}\frac{d\tau}{\tau} - \frac{X_2(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)}\frac{d\tau}{\tau}. \tag{2.2.25}$$

Если $\Delta' = 0$, то для разрешимости (2.2.21) необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\int\limits_{|\tau|=1}\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)}\frac{d\tau}{\tau} = \int\limits_{|\tau|=1}\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)}\frac{d\tau}{\tau}\ ,\ \overline{n} = 0\ ,\ \lambda_0 = \mu_0\ . \tag{2.2.26}$$

$$\mu_0\int\limits_{|\tau|=1}\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)}\frac{d\tau}{\tau^{\nu+1}} = \lambda_0 R^{2\nu}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)}\frac{d\tau}{\tau^{\nu+1}}\ ,\ \overline{n} = \nu\ ,\ \nu\in\mathcal{Z}. \tag{2.2.27}$$

В случае выполнения условий (2.2.26), (2.2.27) задача (2.2.21) имеет решение, зависящее от двух постоянных $C_1,\ C_2$:

$$\Phi(t) = X_1(t)\left[C_1 t^{\overline{n}} + \frac{\mu_0}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}_{\overline{n}}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)}\frac{d\tau}{\tau} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_0}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}_{\overline{n}}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)}\frac{d\tau}{\tau}\right]. \tag{2.2.28}$$

$$\Psi(t) = X_2(t)\left[C_2 t^{\overline{n}} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}_{\overline{n}}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)}\frac{d\tau}{\tau} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}_{\overline{n}}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)}\frac{d\tau}{\tau}\right]. \qquad (2.2.29)$$

b) В случае $æ > 0$ рассмотрим сначала $\Delta' \neq 0$. Введем функции $Q_1(t),\ Q_2(t),$ связанные с искомыми функциями $\Phi(t),\ \Psi(t)$ равенствами

$$\frac{\Phi(t)}{X_1(t)(t-a)^{æ}} = Q_1(t) + \frac{P_{æ-1}(t)}{(t-a)^{æ}}, \qquad (2.2.30)$$

$$\frac{\Psi(t)}{X_2(t)(t-a)^{æ}} = Q_2(t) + \frac{S_{æ-1}(t)}{(t-a)^{æ}}, \qquad (2.2.31)$$

где $P_{æ-1}(t)/(t-a)^{æ}$, $S_{æ-1}(t)/(t-a)^{æ}$ – главные части лорановского разложения левых частей равенств (2.2.30),(2.2.31). Тогда из (2.2.21) получаем ЗК о "скачке" для двух пар функций $Q_1(t),\ Q_2(t)$:

$$Q_1(R^{-1}t) + \lambda_0 Q_2(Rt) = \frac{H_1(t)}{X_1(R^{-1}t)(R^{-1}t-a)^{æ}} - \frac{P_{æ-1}(R^{-1}t)}{(R^{-1}t-a)^{æ}} - \lambda_0\frac{S_{æ-1}(Rt)}{(Rt-a)^{æ}},$$

$$Q_1(Rt) + \mu_0 Q_2(R^{-1}t) = \frac{H_2(t)}{X_1(Rt)(Rt-a)^{æ}} - \frac{P_{æ-1}(Rt)}{(Rt-a)^{æ}} - \mu_0\frac{S_{æ-1}(R^{-1}t)}{(R^{-1}t-a)^{æ}},$$

$$|t| = 1\,. \qquad (2.2.32)$$

Отсюда, по аналогии с (2.2.5) и (2.2.6), получаем решение ЗК (2.2.32):

$$Q_1(t) = \frac{\mu_0}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\left\{\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{æ}} - \frac{P_{æ-1}(R^{-1}\tau)}{(R^{-1}\tau-a)^{æ}} - \right.$$

$$\left. - \lambda_0\frac{S_{æ-1}(R\tau)}{(R\tau-a)^{æ}}\right\}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau} -$$

$$-\frac{\lambda_0}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\left\{\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)(R\tau-a)^{æ}} - \frac{P_{æ-1}(R\tau)}{(R\tau-a)^{æ}} - \mu_0\frac{S_{æ-1}(R^{-1}\tau)}{(R^{-1}\tau-a)^{æ}}\right\}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}.$$

$$(2.2.33)$$

$$Q_2(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\left\{\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{æ}} - \frac{P_{æ-1}(R^{-1}\tau)}{(R^{-1}\tau-a)^{æ}} - \right.$$

$$\left. - \lambda_0\frac{S_{æ-1}(R\tau)}{(R\tau-a)^{æ}}\right\}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau} + \qquad (2.2.34)$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\left\{\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)(R\tau-a)^{æ}}-\frac{P_{æ-1}(R\tau)}{(R\tau-a)^{æ}}-\mu_0\frac{S_{æ-1}(R^{-1}\tau)}{(R^{-1}\tau-a)^{æ}}\right\}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}\,.$$

Учитывая (2.2.21)-(2.2.34), видим, что решение ЗК (2.2.21) примет вид:

$$\Phi(t)\;=\;X_1(t)(t-a)^{æ}Q_1(t)\,+\,X_1(t)P_{æ-1}(t)\;,$$

$$\Psi(t)\;=\;X_2(t)(t-a)^{æ}Q_2(t)\,+\,X_2(t)S_{æ-1}(t)\;.$$

Из (2.2.21),(2.2.24) и (2.2.25) следует, что в этом случае однородная задача имеет ровно $2|æ|$ линейно независимых решений.

Если же $\Delta'=0$, то сохраняют силу (2.2.30), (2.2.31), (2.2.32).

Условия разрешимости (2.2.7) и (2.2.8) примут вид:

$$\int\limits_{|\tau|=1}\left\{\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{æ}}-\frac{P_{æ-1}(R^{-1}\tau)}{(R^{-1}\tau-a)^{æ}}-\lambda_0\frac{S_{æ-1}(R\tau)}{(R\tau-a)^{æ}}\right\}\frac{d\tau}{\tau}=$$

$$=\int\limits_{|\tau|=1}\left\{\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)(R\tau-a)^{æ}}-\frac{P_{æ-1}(R\tau)}{(R\tau-a)^{æ}}-\mu_0\frac{S_{æ-1}(R^{-1}\tau)}{(R^{-1}\tau-a)^{æ}}\right\}\frac{d\tau}{\tau}\,,$$

при $\overline{n}=0,\lambda_0=\mu_0$.

$$\mu_0\int\limits_{|\tau|=1}\left\{\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{æ}}-\frac{P_{æ-1}(R^{-1}\tau)}{(R^{-1}\tau-a)^{æ}}-\lambda_0\frac{S_{æ-1}(R\tau)}{(R\tau-a)^{æ}}\right\}\frac{d\tau}{\tau^{\nu+1}}=$$

$$=\lambda_0R^{2\nu}\int\limits_{|\tau|=1}\left\{\frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)(R\tau-a)^{æ}}-\frac{P_{æ-1}(R\tau)}{(R\tau-a)^{æ}}-\mu_0\frac{S_{æ-1}(R^{-1}\tau)}{(R^{-1}\tau-a)^{æ}}\right\}\frac{d\tau}{\tau^{\nu+1}}\,,$$

при $\overline{n}=\nu,\ \nu\in\mathcal{Z}$.

Учитывая представления (2.2.30), (2.2.31) и формулы (2.2.33), (2.2.34), из (2.2.9), (2.2.10) получаем решение

$$\Phi(t)=X_1(t)(t-a)^{æ}\,Q_1(t)+C_1t^{\nu}X_1(t)(t-a)^{æ}+X_1(t)(t-a)^{æ}\,P_{æ-1}(t).\quad(2.2.35)$$

$$\Psi(t)=X_2(t)(t-a)^{æ}\,Q_2(t)+C_2t^{\nu}X_2(t)\,(t-a)^{æ}+X_2(t)(t-a)^{æ}\,S_{æ-1}(t).\quad(2.2.36)$$

c) $æ<0$. В случае $\Delta'\neq0$ решение будет следующим:

$$\Phi(t)=\mu_0\frac{X_1(t)(t-a)^{æ}}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{æ}}\frac{d\tau}{\tau}-$$

$$-\lambda_0 \frac{X_1(t)(t-a)^{æ}}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)(R\tau-a)^{æ}} \frac{d\tau}{\tau}\,. \qquad (2.2.37)$$

$$\Psi(t) = \frac{X_2(t)(t-a)^{æ}}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_1(\tau)}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{æ}} \frac{d\tau}{\tau} -$$

$$-\frac{X_2(t)(t-a)^{æ}}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)}{X_1(R\tau)(R\tau-a)^{æ}} \frac{d\tau}{\tau}\,. \qquad (2.2.38)$$

Для устранения полюса у этих функций в точке $z = a$ необходимо и достаточно выполнить $2|æ|$ условий:

$$\mu_0 \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(1)j}\left(\frac{a}{\tau}\right) \frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{æ}\tau^{j+1}} =$$

$$= \lambda_0 \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)j}\left(\frac{a}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)(R\tau-a)^{æ}\tau^{j+1}}\ , \ j = 0, 1, \ldots, |æ| - 1\,. \qquad (2.2.39)$$

$$\int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(1)j}\left(\frac{a}{\tau}\right) \frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{æ}\tau^{j+1}} =$$

$$= \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)j}\left(\frac{a}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)(R\tau-a)^{æ}\tau^{j+1}}\ , \ j = 0, 1, \ldots, |æ| - 1\,. \qquad (2.2.40)$$

Если условия (2.2.39), (2.2.40) выполнены, то ЗК (2.2.21) имеет единственное решение (2.2.37), (2.2.38).

В случае $\Delta' = 0$ требуются дополнительные условия разрешимости типа (2.2.7), (2.2.8) для (2.2.21) они будут выглядеть так:

$$\int\limits_{|\tau|=1} \frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{æ}\tau} = \int\limits_{|\tau|=1} \frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)(R\tau-a)^{æ}\tau} \qquad ,\overline{n} = 0\,. \qquad (2.2.41)$$

$$\mu_0 \int\limits_{|\tau|=1} \frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{æ}\tau^{\nu+1}} = \lambda_0 R^{2\nu} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)(R\tau-a)^{æ}\tau^{\nu+1}}\,,$$

$$\overline{n} = \nu,\ \nu \in \mathcal{Z}. \qquad (2.2.42)$$

Предположим, что эти условия выполнены, тогда в соответствии с (2.2.28), (2.2.29) получаем:

$$\Phi(t) = X_1(t)(t-a)^{æ}\left\{C_1 t^{\overline{n}} + \frac{\mu_0}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(1)}_{\overline{n}}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau-a)^{æ}\tau} -\right.$$

$$- \frac{\lambda_0}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)}_{\overline{n}} \left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)(R\tau - a)^{æ}\tau} \Bigg\} \ . \tag{2.2.43}$$

$$\Psi(t) = X_2(t)(t-a)^{æ} \Bigg\{ C_2 t^{\overline{n}} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(1)}_{\overline{n}} \left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau - a)^{æ}\tau} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)}_{\overline{n}} \left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)(R\tau - a)^{æ}\tau} \Bigg\} \ . \tag{2.2.44}$$

Выпишем необходимые и достаточные условия, при которых устраняется полюс в точке a .

$$\left. \left(C_1 \frac{d^j}{dt^j} t^{\overline{n}} \right) \right|_{t=a} + \frac{\mu_0}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(1)j}_{\overline{n}} \left(\frac{a}{\tau}\right) \frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau - a)^{æ}\tau^{j+1}} -$$

$$- \frac{\lambda_0}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)j}_{\overline{n}} \left(\frac{a}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)(R\tau - a)^{æ}\tau^{j+1}} = 0 \qquad , j = 0, 1, \ldots, |æ| - 1 \ . \tag{2.2.45}$$

$$\left. \left(C_2 \frac{d^j}{dt^j} t^{\overline{n}} \right) \right|_{t=a} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(1)j}_{\overline{n}} \left(\frac{a}{\tau}\right) \frac{H_1(\tau)d\tau}{X_1(R^{-1}\tau)(R^{-1}\tau - a)^{æ}\tau^{j+1}} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega^{(2)j}_{\overline{n}} \left(\frac{a}{\tau}\right) \frac{H_2(\tau)d\tau}{X_1(R\tau)(R\tau - a)^{æ}\tau^{j+1}} = 0 \qquad , j = 0, 1, \ldots, |æ| - 1 \ . \tag{2.2.46}$$

Совокупность условий (2.2.41), (2.2.42), (2.2.45), (2.2.46) дает $2|æ| - 2$ необходимых и достаточных условий разрешимости.

В случае выполнения условий (2.2.41) и (2.2.42) ЗК (2.2.1) имеет единственное решение, определяемое формулами (2.2.43), (2.2.44).

Замечание 2.1. *Наряду с изученной выше ЗК (2.2.1) также решены следующие задачи*

$$\begin{cases} \Phi(R^{-1}t) + A(t)\Psi(t) = G_1(t) \\ \Phi(t) + B(t)\Psi(R^{-1}t) = G_2(t) \quad , \ |t| = 1 \ , \end{cases} \tag{2.2.47}$$

$$\begin{cases} \Phi(Rt) + A(t)\Psi(t) = G_1(t) \\ \Phi(t) + B(t)\Psi(Rt) = G_2(t) \quad , \ |t| = 1 \ , \end{cases} \tag{2.2.48}$$

где $G_1(t)$ *и* $G_2(t)$ *заданы и принадлежат пространству* $L_2(|t|=1)$, *известные функции* $A(t)$ *и* $B(t)$ *отличны от нуля на окружности* $|t|=1$ *(нормальный случай) и принадлежат пространству Винера* W.

Построение решения задач Карлемана (2.2.47), (2.2.48) не отличается от предложенного метода для задачи Карлемана (2.2.1).

2.3. Задача Карлемана специального вида с радиальным сдвигом во внутрь области

2.3.1. Постановка задачи

Изучается задача Карлемана для кольца специального вида

$$A(t)\Phi(Rt) + B(t)\Phi(R^{-1}t) + C(t)\Phi(t) = G(t) \ , \quad |t|=1, \tag{2.3.1}$$

где

$$A(t)=\frac{t+1}{2\sqrt{t}} \ , \ B(t)=i\frac{t-1}{2\sqrt{t}} \ , \ C(t)=\frac{t+1}{2\sqrt{t}} - i\frac{t-1}{2\sqrt{t}} \ , \ |t|=1 \tag{2.3.2}$$

известные функции, принадлежащие пространству W, $\sqrt{t}$ - главная ветвь, $G(t)$ - известная функция из пространства $L_2(|t|=1)$ и имеет нули в точках $t=i, \ t=-i$. Ищется неизвестная функция $\Phi(z)\in\{\{R^{-1},R\}\}$, $1<R<\infty$. Используя интегральное представление аналитической функции в кольце [34], задача Карлемана (2.3.1), в смысле разрешимости, будет эквивалентна интегральному уравнению

$$\varphi(t) + D(t)\frac{K'}{2\pi ln\,R}\int\limits_{|\tau|=1} cs\frac{K'}{ln\,R}\left(-i\,ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau +$$

$$+E(t)\frac{K'}{2\pi ln\,R}\int\limits_{|\tau|=1} dn\frac{K'}{ln\,R}\left(-i\,ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau = H(t) \ , \ |t|=1 \ , \tag{2.3.3}$$

где $dn\,\alpha$, $cs\,\alpha$ – двоякопериодические функции Якоби, K и K' – действительный и мнимый четверть периоды, причем они связаны соотношением

$$\frac{K}{K'} = \frac{\pi}{ln\,R},$$

а $\varphi(t)$ - произвольная функция из пространства $L_2(|t|=1)$.

$$D(t) = 2\frac{A(t) - B(t)}{A(t) + B(t)} \;\; ; \;\; E(t) = 2\frac{C(t)}{A(t) + B(t)} \;\; ;$$
$$H(t) = 2\frac{G(t)}{A(t) + B(t)} \;\; , \;\; |t| = 1 \;\; .$$

Функции (2.3.2) эквивалентны следующим функциям

$$A(t) = chln\sqrt{t} \;\; ; \;\; B(t) = ishln\sqrt{t} \;\; ; \;\; C(t) = A(t) - B(t) \;\; , \;\; |t| = 1 \;\; .$$

Тогда, если учесть $chz = coszi, \; shz = -isinzi,$ то они примут вид

$$A(t) = cos\,iln\sqrt{t} \;\; ; \;\; B(t) = sin\,iln\sqrt{t} \;\; ;$$
$$C(t) = cos\,iln\sqrt{t} - sin\,iln\sqrt{t} \;\; , \;\; |t| = 1 \; . \tag{2.3.4}$$

Сделаем замену $t = e^{i\alpha}, \; t\tau = e^{i\theta}, \quad (\alpha = -ilnt, \; \theta = -iln\tau),$ тогда интегральное уравнение (2.3.3) примет вид

$$\varphi_0(\alpha) + D_0(\alpha)\frac{K'}{2\pi ln\,R}\int\limits_0^{2\pi} cs\frac{K'}{ln\,R}(\alpha-\theta)\,\varphi_0(\theta)d\theta +$$

$$+ E_0(\alpha)\frac{K}{2\pi ln\,R}\int\limits_0^{2\pi} dn\frac{K'}{ln\,R}(\alpha-\theta)\,\varphi_0(\theta)d\theta = H_0(\alpha), \; 0 \le \alpha \le 2\pi \; , \tag{2.3.5}$$

где

$$\varphi_0(\alpha) = \varphi(e^{i\alpha}) \quad , \qquad D_0(\alpha) = 2\frac{cos\frac{\alpha}{2} + sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2} - sin\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
$$E_0(\alpha) = 2\frac{cos\frac{\alpha}{2} + sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2} - sin\frac{\alpha}{2}} \quad , \quad H_0(\alpha) = 2\frac{G_0(\alpha)}{cos\frac{\alpha}{2} - sin\frac{\alpha}{2}} \quad . \tag{2.3.6}$$

Здесь учтены структуры функций (2.3.4), которые после замены имеют вид:

$$A_0(\alpha) = cos\frac{\alpha}{2} \;\; , \;\; B_0(\alpha) = -sin\frac{\alpha}{2} \;\; , \;\; C_0(\alpha) = cos\frac{\alpha}{2} + sin\frac{\alpha}{2} \;\; .$$

Очевидно, что $D_0(\alpha) = E_0(\alpha)$. Тогда уравнение (2.3.5) можно записать в виде

$$\varphi_0(\alpha) + D_0(\alpha)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} T(\alpha-\theta)\varphi_0(\theta)d\theta = H_0(\alpha), \;\; 0 \le \alpha \le 2\pi, \tag{2.3.7}$$

где $\varphi_0(\alpha) \in L_2[0,2\pi]$, $H_0(\alpha) \in L_2[0,2\pi]$, а

$$T(\alpha) = \frac{K'}{ln\, R}\left(cs\frac{K'}{ln\, R}(\alpha) + dn\frac{K'}{ln\, R}(\alpha)\right) \tag{2.3.8}$$

сингулярное ядро. Это следует из свойств $cs\,\alpha$.

Итак, мы получили уравнение типа свертки с 2π – периодическим ядром и периодическим множителем.

Уравнение вида (2.3.7) рассматривалось в работе [12,стр.235], при условии, что ядерная функция из $L_2[0,2\pi]$. Далее применим изложенную в указанной работе методику к решению уравнения (2.3.7).

С помощью формул Эйлера функцию $D_0(\alpha)$ можно записать в виде

$$D_0(\alpha) = \frac{\beta_1 + \beta_2\, e^{i\alpha}}{\beta_3 + \beta_4\, e^{i\alpha}} \quad ,$$

где

$$\beta_1 = 2 + 2i\,;\ \beta_2 = 2 - 2i\,;\ \beta_3 = 1 - i\,;\ \beta_4 = 1 + i\ . \tag{2.3.9}$$

Учитывая выше сказанное, из уравнения (2.3.7) получим

$$\beta_3\varphi_0(\alpha) + \frac{\beta_1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(\alpha-\theta)\varphi_0(\theta)d\theta - \beta_3 H_0(\alpha) +$$

$$+e^{i\alpha}\left[\beta_4\varphi_0(\alpha) + \frac{\beta_2}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(\alpha-\theta)\varphi_0(\theta)d\theta - \beta_4 H_0(\alpha)\right] = 0\ , 0 \le \alpha \le 2\pi\,.$$

Вводим новую неизвестную функцию

$$\beta_4\varphi_0(\alpha) + \frac{\beta_2}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(\alpha-\theta)\varphi_0(\theta)d\theta - \beta_4 H_0(\alpha) = F(\alpha) \quad ,$$

$$(2.3.10)$$

$$\beta_3\varphi_0(\alpha) + \frac{\beta_1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(\alpha-\theta)\varphi_0(\theta)d\theta - \beta_3 H_0(\alpha) = -\,e^{i\alpha}F(\alpha) \quad .$$

Рассмотрим свертку

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(\alpha-\theta)\varphi_0(\theta)d\theta\ .$$

Учитывая разложение в ряд функций Якоби [1,стр.388], функции $cs\,\alpha$ и $dn\,\alpha$ примут вид:

$$\frac{K'}{ln\,R}cs\frac{K'}{ln\,R}\alpha = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{R^{2n}-1}{R^{2n}+1}e^{in\alpha} \;\; ; \;\; \frac{K'}{ln\,R}dn\frac{K'}{ln\,R}\alpha = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{R^{n}}{R^{2n}+1}e^{in\alpha} \;\; ,$$

тогда из функции (2.3.8) получим

$$T(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n e^{in\alpha} \; ,$$

где

$$T_n = \frac{R^{2n}+2R^n-1}{2(R^{2n}+1)} \;\; , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \;\; . \tag{2.3.11}$$

Используем свойство дискретного преобразования Фурье

$$W^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} T(\alpha-\theta)\varphi_0(\theta)d\theta\right) = T_n\varphi_{0,n} \; .$$

Так как последовательность T_n ограничена, $\varphi_{0,n} \in l_2$, то свертка принадлежит пространству l_2. К равенствам (2.3.10) применим обратное дискретное преобразование Фурье W^{-1} . В результате получим

$$\begin{cases} (\beta_4 + \beta_2 T_n)\varphi_{0,n} - \beta_4 h_{0,n} = f_n \\ (\beta_3 + \beta_1 T_n)\varphi_{0,n} - \beta_3 h_{0,n} = -f_{n-1} \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \; , \end{cases} \tag{2.3.12}$$

где

$$f_n = W^{-1}F(\alpha) \; ; \; T_n = W^{-1}T(\alpha) \; ; \; \varphi_{0,n} = W^{-1}\varphi_0(\alpha) \; ; \; h_{0,n} = W^{-1}H_0(\alpha) \; .$$

Предположим, что

$$|\beta_4 + \beta_2 T_n| \neq 0 \;\; ; \;\; |\beta_3 + \beta_1 T_n| \neq 0 \; , \;\; \forall\, n \; ,$$

тогда, исключая неизвестную функцию $\varphi_{0,n}$, в (2.3.12)

$$\varphi_{0,n} = \frac{\beta_4 h_{0,n} + f_n}{\beta_4 + \beta_2 T_n} \; , \tag{2.3.13}$$

приходим к уравнению в конечных разностях

$$f_n = -\frac{\beta_4 + \beta_2 T_n}{\beta_3 + \beta_1 T_n}f_{n-1} + \beta_3\frac{\beta_4 + \beta_2 T_n}{\beta_3 + \beta_1 T_n}h_{0,n} - \beta_4 h_{0,n} \; , \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.3.14}$$

2.3.2. Задача "о скачке".

Начнем решение задачи "о скачке ".

$$\psi_n \; = \; -\lambda\psi_{n-1} + d_n \;\; , \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \;\; , \tag{2.3.15}$$

где $\lambda \in \mathcal{C}$ и последовательность $d_n \in l_2$ заданы. Неизвестную последовательность ψ_n ищем из пространства l_2.

К уравнению (2.3.15) применим прямое дискретное преобразование Фурье

$$\Psi(\theta) \; = \; -\lambda e^{i\theta}\Psi(\theta) \; + \; D(\theta) \; 0 < \theta < 2\pi \;\; ,$$

а отсюда

$$\psi_n \; = \; W^{-1}\Psi(\theta) \; = \; W^{-1}\frac{D(\theta)}{1 + \lambda e^{i\theta}} \; . \tag{2.3.16}$$

Для решения уравнения в конечных разностях (2.3.14) применим метод факторизации. Для этого уравнение (2.3.14) перепишем в удобной форме

$$f_n \; = \; -\lambda(1 + s_n)f_{n-1} \; + \; \omega_n \; , \qquad n = 0, \pm 1, \dots \;\; , \tag{2.3.17}$$

где

$$s_n = \frac{(\beta_2\beta_3 - \beta_1\beta_4)T_n}{\beta_4(\beta_3 + \beta_1 T_n)} \; , \; \omega_n = \left(\beta_3\frac{\beta_4 + \beta_2 T_n}{\beta_3 + \beta_1 T_n} - \beta_4\right) h_{0,n} \; , \; \lambda = \frac{\beta_4}{\beta_3}. \tag{2.3.18}$$

Допустим, что имеет место факторизация

$$1 + s_n \; = \; \frac{x_n}{x_{n-1}} \; , \tag{2.3.19}$$

тогда (2.3.17) приводится к задаче "о скачке" (2.3.15), где

$$\psi_n \; = \; \frac{f_n}{x_n} \; , n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \;\; , \tag{2.3.20}$$

$$d_n \; = \; \frac{\omega_n}{x_n} \; , n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \;\; . \tag{2.3.21}$$

Таким образом, решение f_n можно построить по формуле

$$f_n \; = \; x_n W^{-1}\left(\frac{W(\omega_n/x_n)}{1 + \lambda e^{i\theta}}\right) \;\; . \tag{2.3.22}$$

Логарифмированием задача факторизации (2.3.19), в свою очередь, приводится к задаче "о скачке "

$$\tilde{\psi}_n = \tilde{\psi}_{n-1} + \tilde{d}_n \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ .$$

Здесь

$$\tilde{\psi}_n = lnx_n \ , \ \tilde{d}_n = ln(1 + s_n) \ .$$

Факторизующая функция x_n определяется равенствами

$$x_n = exp\left(W^{-1}\frac{\tilde{D}(\theta)}{1 - e^{i\theta}}\right) \ , \ \tilde{D}(\theta) = Wln(1 + s_n) \ . \qquad (2.3.23)$$

Решение уравнения в конечных разностях (2.3.17) построено и определяется формулой (2.3.22).

2.3.3. Построение решения уравнения (2.3.1).

Здесь займемся непосредственным решением уравнения в конечных разностях (2.3.14), а также построением решения исходной задачи Карлемана (2.3.1). Учитывая (2.3.9) из (2.3.18), получаем

$$\lambda = i \ , \ s_n = -2i\frac{R^{2n} + 2R^n - 1}{R^{2n} + 1 + i(R^{2n} + 2R^n - 1)} \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad . \qquad (2.3.24)$$

Используя свойство преобразования Фурье (свертка оригиналов)

$$W^{-1}A(\theta)B(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k}b_k \ ,$$

последовательность x_n, определяемая формулой (2.3.24), примет вид

$$x_n = exp\left\{W^{-1}\frac{W(ln(1 + s_n))}{1 - e^{i\alpha}}\right\} = exp\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_{n-k}ln(1 + s_k)\right\} \ ,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ , \qquad (2.3.25)$$

где

$$y_n = W^{-1}\left(\frac{1}{1 - e^{i\alpha}}\right) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad .$$

Запишем y_n в виде интеграла

$$y_n = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{e^{i\alpha}-1}e^{-in\alpha}d\alpha = \left[\begin{array}{c} t=e^{i\alpha} \\ dt = ie^{i\alpha}d\alpha \end{array}\right] = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{dt}{t^{n+1}(t-1)}\ ,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ . \qquad (2.3.26)$$

Для построения последовательности (2.3.26) нам потребуются следующие факты

$$\int\limits_L \frac{dt}{t-z} = \pi i\ ,\ z \in L\ ,$$

$$\int\limits_L t^n dt = \begin{cases} 0 & ,\quad n \neq -1 \\ 2\pi i & ,\quad n = -1\ , \end{cases}$$

а также теорема (Безу) [68,стр.43]. Таким образом, из представления (2.3.26) получаем

$$y_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & ,\quad n = 0, 1, 2, \dots \\ -\frac{1}{2} & ,\quad n = -1, -2, \dots \end{cases} \qquad (2.3.27)$$

Далее, используя свойство свертки оригиналов, для нахождения последовательности f_n из формулы (2.3.22) получим

$$f_n = x_n W^{-1}\frac{W(\beta_4 s_n h_{0,n}/x_n)}{1+ie^{i\alpha}} = x_n \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\gamma_{n-k}\beta_4\frac{s_k}{x_k}h_{0,k},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\ , \qquad (2.3.28)$$

где

$$\gamma_n = W^{-1}\left(\frac{1}{1+ie^{i\alpha}}\right) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ .$$

Построение последовательности γ_n проводим так же, как и y_n. В результате получаем

$$\gamma_n = \begin{cases} \frac{3}{2}i^{-n} & ,\quad n = 0, 1, 2, \dots \\ -\frac{1}{2}i^{-n} & ,\quad n = -1, -2, \dots \end{cases} \qquad (2.3.29)$$

Решение уравнения в конечных разностях находится с помощью формулы (2.3.28), где γ_n определяется из (2.3.29), $\beta_4 = 1 + i,\ h_{0,n} = W^{-1}H_0(\alpha),$

последовательность y_n определяется из (2.3.27), а

$$x_n = exp\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_{n-k} ln(1+s_k)\right\} \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \quad ,$$

$$s_n = -2i\frac{R^n - 1}{R^n + 1 + i(R^n - 1)} \quad ; \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \quad .$$

Далее из (2.3.13) находим последовательность φ_n, то есть решение системы (2.3.12) и после применения дискретного преобразования Фурье W получим решение $\varphi_0(\alpha)$ интегрального уравнения (2.3.7). Произведя замену $\alpha = -ilnt$ и используя интегральное представление аналитической функции в кольце

$$\Phi(t) = \frac{K'}{2\pi ln\,R}\int\limits_{|\tau|=1} dn\frac{K'}{ln\,R}\left(-i\,ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau \quad ,$$

получим решение задачи Карлемана специального вида с радиальным сдвигом во внутрь области (2.3.1).

Замечание 2.2. *Если рассмотреть задачу Карлемана (2.3.1), а функции (2.3.2) положить равными*

$$A(t) = \frac{t^m + 1}{2\sqrt{t^m}} \; ; \; B(t) = i\frac{t^m - 1}{2\sqrt{t^m}} \; ; \; C(t) = \frac{t^m + 1}{2\sqrt{t^m}} - i\frac{t^m - 1}{2\sqrt{t^m}} \; , \; |t| = 1 \, ,$$

где m *- целое число, то построение решения принципиально не изменится.*

Применяя интегральное представление аналитической функции в кольце и произведя замену $t = e^{i\alpha}$, $\tau = e^{i\theta}$, получим интегральное уравнение (2.3.7), но

$$D_0(\alpha) = 2\frac{cos\frac{m\alpha}{2} + sin\frac{m\alpha}{2}}{cos\frac{m\alpha}{2} - sin\frac{m\alpha}{2}} \quad .$$

Введя новую неизвестную функцию и применяя дискретное преобразование Фурье, получим аналог системы (2.3.12). Откуда приходим к уравнению в конечных разностях

$$f_n = -\frac{\beta_4 + \beta_2 T_n}{\beta_3 + \beta_1 T_n} f_{n-m} + \beta_3\frac{\beta_4 + \beta_2 T_n}{\beta_3 + \beta_1 T_n} h_{0,n} - \beta_4 h_{0,n} \, , \; n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Здесь факторизацией будет

$$1 + s_n \;=\; \frac{x_n}{x_{n-m}} \;,$$

а факторизующая функция находится из соотношения

$$x_n \;=\; exp\left(W^{-1} \frac{W ln(1+s_n)}{1-e^{im\theta}} \right) \;\; .$$

Решение уравнения в конечных разностях находится по формуле

$$f_n \;=\; x_n W^{-1} \left(\frac{W(\omega_n / x_n)}{1 + \lambda e^{im\theta}} \right) \;,$$

где $s_n, \ \omega_n, \ \lambda$ – определяются из формул (2.3.18), а $\beta_1, \ \beta_2, \ \beta_3, \ \beta_4$ из (2.3.9).

2.4. Применение метода Бубнова - Галеркина к задаче Карлемана для кольца и для полосы

2.4.1. Постановка задачи.

Пусть K – линейный оператор, действующий из Банахова пространства X в банахово пространство Y, причем возможно, чтобы эти пространства совпадали X=Y.

$$K\,x \;=\; y \;\; (\; x \,\in\, X \;,\; y \,\in\, Y \;) \;\; , \tag{2.4.1}$$

Выберем в банаховом пространстве X полную ортонормированную систему функций $\{ \, \psi_k \, \} \, _1^{\infty}$.

Приближенное решение уравнения (2.4.1) будем искать в виде

$$x_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \, \xi_k \, \psi_k \;\; . \tag{2.4.2}$$

Проекционный оператор $P_n,$ построенный по полной ортонормированной системе $\{\psi_k\}_1^{\infty},$ будет обладать всеми свойствами операторов ортогонального проектирования [59,стр.194], в том числе $P_n^2 = P_n, \ \| \ P_n \ \| = 1, \ P^* = P,$

то есть P– самосопряжённый. Известно [59,стр.63], что если система $\{\psi_k\}_1^\infty$ полная, то $P_n x \to x$ при $n \to \infty$ причем

$$\| \, x - P_n x \, \| ^{\,2} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \xi_i^2 \ , \tag{2.4.3}$$

где $\xi_i = (x \, , \psi_i)-$ коэффициенты Фурье элемента x по $\{ \, \psi_k \, \} \, _1^\infty$. И вопрос о скорости сходимости $P_n x \to x$ сводится к вопросу о порядке при $n \to \infty$ коэффициентов Фурье ξ_n.

Итак, с помощью ортопроектора P_n строим соответствующее точному уравнению (2.4.1) приближённое уравнение

$$P_n K x_n = P_n y \ , \ (x_n \in X_n \, , \, P_n y \in Y_n \,) \ . \tag{2.4.4}$$

Согласно [10,стр.27] приближенное уравнение (2.4.4) разрешимо при любой правой части из Y_n $(n = 1, 2, \dots)$. Причем, если разрешимо уравнение (2.4.1), то для "невязки" имеем оценку

$$\| \, K x^* - K x_n^* \, \| \leq \| \, E - P_n \, \| \cdot \| \, K \, \| \cdot E_n (x^*) \ , \tag{2.4.5}$$

где $E_n (x^*) = \rho (x^* , X_n)_X$.

Определение 2.6. [10] *Число* $\rho (x^* , X_n)_X$ *– характеризует наилучшее приближение (наилучшую апроксимацию) элемента* x^* *при помощи элементов пространства* X_n

$$\rho (x^* , X_n)_X = \inf_{u \in X_n} \| \, x^* - u \, \| \ .$$

Если существует обратный оператор K^{-1}, то, согласно следствию к теореме 1 из работы [10,стр.10], существует K_n^{-1} и имеет место теорема 10 [10,стр.20]. Тогда скорость сходимости точного решения к приближённому определяется из

$$\| \, x^* - x_n^* \, \| = O (\| \, y - y_n \, \|) \ , \tag{2.4.6}$$

а из оценки "невязки" (2.4.5) получаем

$$\| x^* - x_n^* \| \leq \| E - P_n \| \cdot \eta(K) \cdot E_n(x^*) \ , \tag{2.4.7}$$

где $\eta(K) = \| K \| \cdot \| K^{-1} \|$ - число обусловленности оператора K. Число обусловленности оператора K служит количественной характеристикой, которая позволяет судить о связи погрешности приближённого решения и соответствующей невязки, т.е. величин

$\varepsilon = x^* - x_n^* , \ \delta = y - K x_n^* = K x^* - K x_n^*.$

Если $\eta(K)$ - не велико, то уравнение (2.4.1) хорошо обусловлено, если же оно большое - то (2.4.1) плохо обусловлено.

Вывод 2.1 (случай Банахова пространства). *Приближённое уравнение (2.4.4), построенное с помощью ортопроектора* P_n *по полной ортонормированной системе* $\{ \psi_k \}_1^\infty$, *разрешимо при любой правой части и в случае разрешимости точного уравнения (2.4.1) имеет место оценка (2.4.5), а в случае существования обратного оператора* K^{-1} *существует и* K_n^{-1} *и имеет место оценка (2.4.7) со скоростью сходимости (2.4.6). Причем приближённое решение уравнения (2.4.1) строится по (2.4.2).*

Вывод 2.2 (случай Гильбертова пространства). *В Гильбертовом пространстве имеют место все результаты, полученные для Банахова пространства, причем, если существует* K^{-1}, *то получаем оценку "невязки"*

$$\| x^* - x_n^* \| \leq \eta(K) \cdot E_n(x^*) \ ,$$

$$\| y - K x_n^* \| \leq E_n(y) \ . \tag{2.4.8}$$

2.4.2. Построение приближённого решения трёхэлементной задачи Карлемана в кольце.

Норму и скалярное произведение в $L_2(|t|=1)$ определим следующим образом

$$\| \Phi(t) \|_{L_2(|t|=1)} = \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} |\Phi(t)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}$$

$$(F, G) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} F(t)\, \overline{G(t)} \frac{dt}{t} ,$$

$$\forall\ F(t), G(t) \in L_2(|t|=1) .$$

Требуется найти аналитическую в кольце $R^{-1} < |z| < R$, где $R > 1$, функцию $\Phi(t)$ по граничному условию

$$K\Phi \equiv A(t)\Phi(Rt) + B(t)\Phi(R^{-1}t) + C(t)\Phi(t) = H(t) ,\ |t| = 1 , \qquad (2.4.9)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ заданные функции, принадлежащие пространству W, $H(t)$ заданная функция из пространства $L_2(|t|=1)$.

Рассмотрим на $|t| = 1$ систему функций t^k, $k = 0, \pm 1, \ldots$. Согласно [59,стр.157] она ортонормирована и полна в $L_2(|t|=1)$.

Пусть $x(t) \in L_2(|t|=1)$, тогда коэффициенты Фурье функции $x(t)$ определяются следующим образом

$$x_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} x(t) \frac{dt}{t^{k+1}} ,\ k = 0, \pm 1, \ldots ,$$

а ряд Фурье функции $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k t^k$$

и справедливо равенство Парсеваля

$$\| x(t) \|^2_{L_2(|t|=1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2 .$$

Обозначим через U_n – оператор , который ставит в соответствие функции $x(t)$ отрезок ее ряда Фурье, т.е.

$$(U_n x)(t) = \sum_{k=-n}^{n} x_k t^k . \qquad (2.4.10)$$

Согласно теореме (Теплера) [16,59], отрезки рядов Фурье в Гильбертовых пространствах по ортонормированным системам осуществляют наилучшее приближение функци по норме данного пространства

$$\| \, x(t) - (U_n x)(t) \, \|_{L_2(|t|=1)} = E_n(x)_{L_2(|t|=1)} \quad , \tag{2.4.11}$$

где $E_n(x)$ – величина наилучшего приближения многочленами степени не выше n.

В работах [16,36,37,58] даны оценки наилучшего приближения в различных пространствах.

Приближённое решение задачи Карлемана (2.4.9) будем искать в виде

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \varphi_k \, t^k \quad , \tag{2.4.12}$$

где φ_k неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Так как система $\{ t^k \}_{k=-n}^{n}$ – ортонормирована и полна, то проекторы

$$P_n = \sum_{k=-n}^{n} (\, \cdot \, , t^k) \, t^k \quad , \tag{2.4.13}$$

оказываются ортопроекторами.

Потребуем, чтобы "невязка" $K \, \Phi_n - H$ была ортогональна к $2n+1$ линейным функционалам проекционной системы $\psi = t^k$, то есть выполнялось

$$< K \, \Phi_n - H \, , \psi_k > = 0 \quad , \quad k = \overline{-n, n} \quad .$$

Другими словами, к уравнению (2.4.9) применим оператор проектирования (2.4.13), то есть уравнение (2.4.9) скалярно умножим на t^m. Таким образом получаем

$$\sum_{k=-n}^{n} \Big(\Big\{ A(t) R^k + B(t) R^{-k} + C(t) \Big\} \, t^k \, , \, t^m \Big) \, \varphi_k = (\, H(t) \, , \, t^m \,) \, ,$$

$$|\, t \,| = 1 \, , \;\; m = \overline{-n, n} \quad ,$$

и, если теперь положить

$$a_{km} = \Big((\, A(t) R^k + B(t) R^{-k} + C(t) \,) \, t^k \, , \, t^m \Big) \; ;$$

$$h_m = (H(t), t^m), \; |t| = 1, \; m = \overline{-n, n}, \; k = \overline{-n, n},$$

то получаем алгебраическую систему

$$\left\{ \sum_{k=-n}^{n} a_{km} \varphi_k = h_m , \; m = \overline{-n, n} \right. . \tag{2.4.14}$$

Согласно [20] система (2.4.14) разрешима всегда и имеет единственное решение и, так как система (2.4.14) эквивалентна (2.4.4) и имеет вид

$$P_n K \Phi_n = P_n H , \tag{2.4.15}$$

то вопрос о разрешимости алгебраической системы, построенной по методу Бубнова - Галёркина, сводится к вопросу о разрешимости уравнения (2.4.15), то есть (2.4.4), который был изучен выше.

Здесь лишь проверим выполнимость условий I и II в работе [10,стр.8], причем, достаточное условие I выполняется с $\varepsilon_1 = 0$, так как $\bar{K} = P_n K$, а условие II выполняется с $\varepsilon_2^{(n)} \to 0, \; n \to \infty$, так как $K \Phi_n$ $n \to \infty$ сколь угодно близко приближается к H отрезком ряда Фурье по полной системе.

Отрезок ряда Фурье (2.4.12), построенный по (2.4.10), осуществляет наилучшее приближение по норме (2.4.11).

Таким образом, приближённое решение трёхэлементной задачи Карлемана в кольце (2.4.9) строится по (2.4.12), коэффициенты которых определяются из системы (2.4.14).

2.4.3. Построение приближённого решения многоэлементной ЗК для полосы.

Норму элемента $f(\lambda)$ и скалярное произведение элементов $f(\lambda), g(\lambda)$ в пространстве $L_2(R)$ введем следующим образом

$$\| \, f(\lambda) \, \| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} | \, f(\lambda) \, | \, d\lambda \right)^{1/2},$$

$$(f(\lambda) \, , \, g(\lambda) \,) \; = \; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \, \overline{g(\lambda)} \, d\lambda \, .$$

Рассматривается задача Карлемана о нахождении аналитической функции $\Phi\,(z)$ в полосе $-m \, < \, Im \, z \, < \, m$

$$\sum_{p=-m}^{m} A_p(\lambda)\Phi\,(\lambda + pi) \; = \; H\,(\lambda) \; , \qquad (2.4.16)$$

где известные функции $A_p\,(\lambda)\,,\, p \, = \, \overline{-m, m}$ непрерывны на всей сомкнутой оси OX, а заданная функция $H\,(\lambda) \, \in \, L_2\,(R)$.

На вещественной оси R рассмотрим систему функций

$$\varphi_0\,(\lambda) \; = \; 1 \quad , \quad \varphi_k^{\pm}\,(\lambda) \; = \; \frac{1}{\lambda \, \pm \, i(k + m + 1)} \; , \; k \, \in \, \mathcal{N} \; , \qquad (2.4.17)$$

которая согласно [2,стр.280] является полной в пространстве $L_2\,(R)$ Указанная система обладает свойствами:

$$\varphi_k^{\pm}\,(\lambda) \; = \; \overline{\varphi_k^{\mp}\,(\lambda)} \;\; , \; k \, \in \, \mathcal{N} \, . \qquad (2.4.18)$$

Введем оператор

$$K \, \Phi \; \equiv \; \sum_{p=-m}^{m} A_p(\lambda)\Phi\,(\lambda + pi) \; , \qquad (2.4.19)$$

который является линейным и действует из $L_2\,(R)$ $L_2\,(R)$.

Предположим, что задача (2.4.16) является нётеровой, безусловно разрешимой и имеет единственное решение. Тогда, согласно [8], оператор K является нормально разрешимым и ограниченным, а так же существует ограниченный обратный K^{-1}. Таким образом, имеет место Вывод 2.2 и оценки (2.4.8).

Приближенное решение задачи (2.4.16) будем искать в виде отрезка ряда Фурье по ортонормированной системе (2.4.17)

$$\Phi_n\,(\lambda) \; = \; \alpha_0 \, + \, \sum_{k=1}^{n} \left[\, \alpha_k^{+} \, \varphi_k^{+}\,(\lambda) \; + \; \alpha_k^{-} \, \varphi_k^{-}\,(\lambda) \,\right] , \qquad (2.4.20)$$

где $\alpha_0, \; \alpha_k^{\pm} \, , \, k \, = \, \overline{1, n}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

При этом будем предполагать, что точное решение задачи (2.4.16) принадлежит пространству $L_2(R)$. Неизвестные коэффициенты $\alpha_k^{\pm}$ определяем из системы, полученной при выполнении условия ортогональности "невязки" к линейным функционалам проекционной системы.

Итак,

$$\begin{cases} \alpha_0\, a_{00} \;+\; \sum\limits_{k=1}^{n} (\, \alpha_k^+ \, a_{k0}^+ \;+\; \alpha_k^- \, b_{k0}^- \,) \;=\; h_0 \\ \alpha_0\, a_{0j}^+ \;+\; \sum\limits_{k=1}^{n} (\, \alpha_k^+ \, a_{kj}^+ \;+\; \alpha_k^- \, b_{kj}^+ \,) \;=\; h_j^+ \\ \alpha_0\, a_{0j}^- \;+\; \sum\limits_{k=1}^{n} (\, \alpha_k^+ \, a_{kj}^- \;+\; \alpha_k^- \, b_{kj}^- \,) \;=\; h_j^- \\ \qquad\qquad j \;=\; \overline{1,n}\;, \end{cases} \tag{2.4.21}$$

где

$$a_{00} \;=\; (\, \sum_{p=-m}^{m} A_p \;,\; \varphi_0 \,),\; a_{0j}^{\pm} \;=\; (\, \sum_{p=-m}^{m} A_p \;,\; \varphi_j^{\pm} \,),$$

$$a_{k0}^{+} \;=\; (\, \sum_{p=-m}^{m} A_p\, \varphi_{k-p}^{+} \;,\; \varphi_0 \,),\; a_{kj}^{\pm} \;=\; (\, \sum_{p=-m}^{m} A_p\, \varphi_{k-p}^{+} \;,\; \varphi_j^{\pm} \,),$$

$$b_{k0}^{-} \;=\; (\, \sum_{p=-m}^{m} A_p\, \varphi_{k-p}^{-} \;,\; \varphi_0 \,),\; b_{kj}^{\pm} \;=\; (\, \sum_{p=-m}^{m} A_p\, \varphi_{k-p}^{-} \;,\; \varphi_j^{\pm} \,),$$

$$h_0 \;=\; (\, H \;,\; \varphi_0 \,),\; h_j^{\pm} \;=\; (\, H \;,\; \varphi_j^{\pm} \,),\; k \;=\; \overline{1,n},\; j \;=\; \overline{1,n}\;.$$

Согласно [20] система (2.4.21) разрешима всегда и имеет единственное решение. Здесь, также как и в предыдущем пункте, имеет место связь с (2.4.4).

Не трудно проверить выполнимость условий I и II в работе [10,стр.8]. Учтём так же следующий факт: коэффициент $\alpha_0 \;=\; 0$, так что $H(\lambda) \in L_2(R)$

Итак, приближенное решение (2.4.20) стремится к ее точному решению по норме пространства $L_2(R)$:

$$\|\; \Phi(\lambda) \,-\, \Phi_n(\lambda) \;\|_{\,L_2} \;\to\; 0\,,\;\; n \to \infty\,,$$

со скоростью

$$\|\; \Phi(\lambda) \,-\, \Phi_n(\lambda) \;\|_{\,L_2} \;\le\; d\,\frac{ln\,\theta}{\theta},$$

где d – определённая постоянная, а

$$\theta \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{k+m+1}{1+(k+m+1)^2}.$$

Исследования по приближённому решению трёхэлементной задачи Карлемана для полосы с аналитическим сдвигом во внутрь области были проделаны ранее Тихоненко Н.Я. в работе [13].

Выводы

Для задачи Карлемана в кольце вида

$$A(t)\Phi(Rt) + B(t)\Phi(R^{-1}t) + C(t)\Phi(t) = G(t), \ |t| = 1,$$

где $A(t), B(t), C(t), |t| = 1$ - известные функции, принадлежащие пространству W, а $G(t)$ функция из пространства $L_2(|t| = 1)$, неизвестная функция $\Phi(z) \in \{\{R^{-1}, R\}\}, \ 1 < R < \infty,$ в симметричном случае $A(t) \equiv B(t)$, $|t| = 1,$ получена следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть оператор S действует из* $L_2([0, 2\pi])$ *в* $L_2([0, 2\pi])$ *и пусть* $\gamma = \max\limits_{\alpha\in[0,2\pi]} \left|\frac{C(e^{i\alpha})}{A(e^{i\alpha})}\right| < 1,$ *тогда задача Карлемана в кольце в классе* $L_2([0, 2\pi])$ *имеет решение, причем единственное.*

В несимметричном случае $A(t) \neq B(t), |t| = 1$ задача Карлемана сводится к полному особому интегральному уравнению с ядром Гильберта, а последнее регуляризацией приводится к уравнению Фредгольма 2-го рода. Вопрос о существовании решения задачи Карлемана для кольца сводится к вопросу о разрешимости уравнения Фредгольма 2-го рода.

Далее в 2.2. решена задача Карлемана в кольце для двух пар функций, которая состоит в нахождении двух аналитических в кольце функций $\Phi(z), \Psi(z)$, удовлетворяющих на границе кольца $R^{-1} < |t| < R, 1 < R < \infty$ следующим условиям:

$$\begin{cases} \Phi(R^{-1}t) + A(t)\Psi(Rt) = G_1(t) \\ \Phi(Rt) + B(t)\Psi(R^{-1}t) = G_2(t) \quad , \ |t| = 1 \ , \end{cases}$$

где функции $G_1(t),\ G_2(t)$ заданы и принадлежат $L_2(|t|=1)$, известные функции A(t) и B(t) отличны от нуля на окружности $|t|=1$ и принадлежат пространству Винера W.

Получены условия разрешимости ЗК в кольце для двух пар функций и построены решения в случаях нулевых и специального вида ($æ = æ_1 = -æ_2$) индексов.

В 2.3. изучена задача Карлемана специального вида с радиальным сдвигом во внутрь области

$$A(t)\Phi(Rt)\ +\ B(t)\Phi(R^{-1}t)\ +\ C(t)\Phi(t)\ =\ G(t)\ ,\quad |t|=1,$$

где

$$A(t)\ =\ \frac{t+1}{2\sqrt{t}}\ ,\ B(t)\ =\ i\frac{t-1}{2\sqrt{t}}\ ,\ C(t)\ =\ \frac{t+1}{2\sqrt{t}}\ -\ i\frac{t-1}{2\sqrt{t}}\ \ (|t|=1),$$

известные функции, функция $G(t)$ - известна. Ищется неизвестная функция $\Phi(z)$. Используя интегральное представление аналитической функции в кольце с помощью замены $t=e^{i\alpha}, \tau=e^{i\theta}$ и преобразований получаем уравнение типа свертки с 2π – периодическим сингулярным ядром и периодическим множителем. Далее, разлагая в ряд функции Якоби и используя свойства дискретного преобразования Фурье, приходим к уравнению в конечных разностях

$$f_n\ =\ -\frac{\beta_4\ +\ \beta_2 T_n}{\beta_3\ +\ \beta_1 T_n} f_{n-1}\ +\ \beta_3\frac{\beta_4\ +\ \beta_2 T_n}{\beta_3\ +\ \beta_1 T_n} h_{0,n}\ -\ \beta_4\, h_{0,n},\qquad n\ =\ 0,\pm 1,\pm 2,\ldots,$$

которое, в свою очередь, решается факторизацией.

При построении приближенного решения ЗК в кольце и ЗК в полосе применяется метод Бубнова - Галёркина (§2.4.). Приближённое решение задачи Карлемана в кольце

$$K\Phi\equiv A(t)\Phi(R\,t)+B(t)\Phi(R^{-1}\,t)+C(t)\Phi(t)=H(t)\ ,|t|=1,$$

где $A(t),\,B(t),\,C(t)$ заданные функции, принадлежащие пространству W, а $H(t)$ заданная функция из пространства $L_2(|t|=1)$, а неизвестная функция $\Phi(t)$ ищется в виде

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \varphi_k t^k ,$$

где φ_k - неизвестные коэффициенты, определяемые из алгебраической системы

$$\left\{ \sum_{k=-n}^{n} a_{km} \varphi_k = h_m , \quad m = \overline{-n, n}. \right. .$$

Далее рассматривается задача Карлемана о нахождении аналитической функции $\Phi(z)$ в полосе $-m < Im\, z < m$

$$\sum_{p=-m}^{m} A_p(\lambda) * \Phi(\lambda + pi) = H(\lambda) ,$$

где известные функции $A_p(\lambda)$, $p = \overline{-m, m}$ непрерывны на всей сомкнутой оси OX, а заданная функция $H(\lambda) \in L_2(R)$.

Приближённое решение ЗК в полосе ищется в виде отрезка ряда Фурье по ортонормированной системе

$$\Phi_n(\lambda) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} [\, \alpha_k^+ \varphi_k^+(\lambda) + \alpha_k^- \varphi_k^-(\lambda) \,] ,$$

где α_0, $\alpha_k^{\pm}$, $k = \overline{1, n}$ – неизвестные коэффициенты определяются из системы

$$\begin{cases} \alpha_0 a_{00} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^+ a_{k0}^+ + \alpha_k^- b_{k0}^-) = h_0 \\ \alpha_0 a_{0j}^+ + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^+ a_{kj}^+ + \alpha_k^- b_{kj}^+) = h_j^+ \\ \alpha_0 a_{0j}^- + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^+ a_{kj}^- + \alpha_k^- b_{kj}^-) = h_j^- \quad j = \overline{1, n} . \end{cases}$$

Материалы подраздела 2.1. были опубликованы в работе [61], подраздела 2.2. были опубликованы в работе [30].

РАЗДЕЛ 3

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВОДЯЩИЕСЯ К ЗАДАЧЕ КАРЛЕМАНА

3.1. Линейные дифференциальные уравнения со степенными и экспоненциальными коэффициентами сводящиеся, к многоэлементной задаче Карлемана

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение конечного порядка с полиномиальными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n} t^k (\sum_{m=-l}^{l} \alpha_{k,m} t^m) y^{(k)}(t) = h(t) \ , \ t \ \geq \ 0 \ , \tag{3.1.1}$$

где $\alpha_{k,m} \in \mathcal{C},\ k = \overline{0,n},\ m = \overline{-l,l},\ 1 \leq n < \infty,\ l \in \mathcal{N}.$

Решение уравнения (3.1.1) будем искать в классе

$$S = \left\{ y : \ y^{(k)}(t) t^{k-1/2} \in L_2(0,+\infty) \ , \ k = \overline{0,n} \right\} \ ,$$

а свободный член $h(t)$ предполагается принадлежащим классу

$$T = \left\{ h : \ \frac{t^{l-1/2}}{\sum\limits_{n=0}^{2l} t^n} h(t) \in L_2(0,+\infty) \right\} \ .$$

Произведем замену переменной $t = e^x$, и введем новые функции

$$y(t) = f(x) \quad , \quad \frac{h(t)}{t^{-l} + \ldots + t^l} \ = \ g(x) \quad .$$

Используем полученное в работе [27] выражение k-ой производной от функции $y(t(x))$ по t.

$$y^{(k)}(t(x)) = \left(\sum_{j=1}^{k} s_j^k f^{(j)}(x) \right) e^{-kx}, \tag{3.1.2}$$

где

$$s_j^k = \begin{cases} (-1)^{k-1}(k-1)! & , \quad j=1 \\ s_{j-1}^{k-1} - (k-1)s_j^{k-1} & , \quad 1<j<k \\ 1 & , \quad j=k \\ 0 & , \quad j>k \ . \end{cases} \tag{3.1.3}$$

Итак, учитывая (3.1.2), (3.1.3), из (3.1.1) получим

$$\left(\sum_{m=-l}^{l} \alpha_{0,m} e^{mx}\right) f(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{m=-l}^{l} \alpha_{k,m} e^{mx}\right) \sum_{j=1}^{k} s_j^k f^{(j)}(x) = \sum_{m=-l}^{l} e^{mx} g(x) \ . \tag{3.1.4}$$

Пусть

$$a_{0,m} = \alpha_{0,m} \ ; \ a_{j,m} = i^j \sum_{k=j}^{n} \alpha_{k,m} s_j^k \ , \ m = \overline{-l,l} \ ,$$

тогда из (3.1.4) получим

$$\sum_{m=-l}^{l} e^{mx} \left[\sum_{j=0}^{n} i^{-j} a_{j,m} f^{(j)}(x) - g(x)\right] = 0 \ . \tag{3.1.5}$$

Так как решение ищется в пространстве S, учитывая взаимосвязь функций (3.1.2), получим что $f^{(k)}(x) \in L_2(R),\ e^{\pm lx} f^{(k)}(x) \in L_2(R), k = \overline{0,n}.$ Согласно теореме [56,стр.173] функция $f(x)$ аналитически продолжима в полосу $|Imz| < l$ и существует такая постояная C, что $\forall y \in [-l,l]$ справедливо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2 dx \le C \ .$$

Так как функция $f(x)$ аналитически продолжима в полосу $|Imz| < l$, то применив к уравнению (3.1.5) преобразование Фурье и используя свойства

$$V(f^{(k)}(x))(x) = (-ix)^k F(x) \ , \ V(e^{-mx} f(x))(x) = F(x+mi) \ ,$$

получим

$$\sum_{m=-l}^{l} \left(\left[\sum_{j=0}^{n} a_{j,m}(x-mi)^j\right] F(x-mi) - G(x-mi)\right) = 0 \ . \tag{3.1.6}$$

Введем новую функцию

$$A_m(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{j,m}(x-mi)^j \ ,$$

тогда из (3.1.6) получаем многоэлементную ЗК для полосы $|Imz| < l$

$$\sum_{m=-l}^{l} A_m(x)F(x-mi) \;=\; \sum_{m=-l}^{l} G(x-mi)\ . \tag{3.1.7}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3.1.1. *Пусть решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (3.1.1) ищется в пространстве S, тогда уравнение (3.1.1) эквивалентно в смысле разрешимости задаче Карлемана (3.1.7).*

Далее рассмотрим схожее по своей структуре линейное дифференциальное уравнение с экспоненциальными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=-l}^{l} \alpha_{k,m} e^{-mx} f^{(k)}(x) \;=\; h(x)\ ,\ x \in \mathcal{R}\ , \tag{3.1.8}$$

где $\alpha_{k,m} \in \mathcal{C},\ k = \overline{0,n},\ m = \overline{-l,l},\ 1 \leq n < \infty,\ l \in \mathcal{N}$. Неизвестная функция ищется из условия $f^{(k)}(x) \in L_2(R),\ e^{\pm lx} f^{(k)}(x) \in L_2(R), k = \overline{0,n}$, а правая часть $h(x) \in L_2(R)$.

Применив прямое преобразование Фурье, из (3.1.8) получим

$$\sum_{m=-l}^{l}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_{k,m}(-i)^k (x+mi)^k\right) F(x+mi) \;=\; H(x)\ , \tag{3.1.9}$$

где $H(x) = V(h(x))$.

Пусть

$$A_m(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{k,m}(-i)^k (x+mi)^k$$

тогда уравнение (3.1.9) примет вид

$$\sum_{m=-l}^{l} A_m(x)F(x+mi) \;=\; H(x)\ . \tag{3.1.10}$$

Итак, получена многоэлементная ЗК для полосы $|Imz| < l$ и имеет место

Теорема 3.1.2. *Если искать решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (3.1.8) при условии $f^{(k)}(x) \in L_2(R), e^{\pm lx} f^{(k)}(x) \in L_2(R)$, $k = \overline{0,n}$, то (3.1.8) эквивалентно в смысле разрешимости ЗК (3.1.10).*

В общем виде решение ЗК (3.1.7) и (3.1.10) строится приближённым методом, изложенным в подразделе 2.4 раздела II.

3.2. Класс дифференциально-разностных уравнений, сводящихся к задаче Карлемана для кольца

Область или совокупность областей, для которых ставится задача, берётся на плоскости (x, y), где границы должны состоять из прямых $y = const$.

Задаем вещественные числа $y_1, \ldots, y_N$, где $N \geq 1$, $y_{k-1} < y_k$. При $N = 1$ возможны такие области: полуплоскость $y > y_1$, полуплоскость $y < y_1$, совокупность областей $y > y_1$ и $y < y_1$, плоскость с разрезом $y = y_1$. В случае $N > 1$ для построения области возьмем $N - 1$ полосу $y_s < y < y_{s+1}$, $s = 1, 2, \ldots, N-1$. К этим полосам присоединим полуплоскость $y < y_1$ и $y > y_N$ (либо одну из этих полуплоскостей, либо ни одной). Наконец, соединим некоторые из построенных областей (или все, или ни одной) вдоль лучей $y = y_k$.

Дифференциальное уравнение должно быть линейным с коэффициентами, не зависящими от x. В частности, запишем дифференциальное уравнение на плоскости (x, y)

$$\sum_{p=0}^{A} \sum_{q=0}^{B} a_{pq}(y) \, \frac{\partial^{p+q} U(x,y)}{\partial x^p \partial y^q} = g(x, y). \tag{3.2.1}$$

Лемма 3.1 [4,стр.63] *Разности m-го порядка выражаются через значение функции по формуле*

$$f_i^m \;=\; \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_m^j \, f_{i+\frac{m}{2}-j}.$$

При четном m, i–целое; при нечетном m, i – полуцелое.

Из (3.2.1) получаем дифференциально - разностное уравнение

$$\sum_{p=0}^{A} \sum_{q=0}^{B} a_{pq}(y) \, \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j \, \frac{d^q u_{n+p/2-j}(y)}{dy^q} = g_n(y) \, , \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \; , \tag{3.2.2}$$

где A, B - целые положительные числа, $A + B$ - порядок дифференциально - разностного уравнения, $a_{pq}(y)$, $g_n(y)$ – заданные функции, $u_n(y)$

– искомая функция. Если p – четное, то n – целое, если p – нечётное, то n – полуцелое .

$$C_p^j = \frac{p!}{j!(p-j)!} = \frac{p(p-1)\dots(p-j+1)}{j!} \quad , \quad p \geq j \ .$$

Зададим граничные условия

$$c_{rs}\left\{\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\left[\alpha_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s+0)}{dy^q} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \beta_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s-0)}{dy^q}\right] - g_{nrs}\right\} +$$
$$+ a_{rs}R^n\left\{\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\left[\gamma_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+p/2-j}(y_s+0)}{dy^q} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \delta_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+p/2-j}(y_s-0)}{dy^q}\right] - g_{nrs}\right\} +$$
$$+ b_{rs}R^{-n} * \left\{\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\left[\mu_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s+0)}{dy^q} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \nu_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s-0)}{dy^q}\right] - g_{nrs}\right\} = 0$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad , \tag{3.2.3}$$

где $r = \overline{1, m_s}$ – количество условий на границе s , $s = \overline{1, N}$, последовательности $g_{nrs}-$ заданные в l_2, а a_{rs}, b_{rs}, c_{rs}, α_{pqrs}, β_{pqrs}, γ_{pqrs}, $\delta_{pqrs}, \mu_{pqrs}, \nu_{pqrs}$ – заданные числа, $0 < R < 1$.

К условиям (3.2.3) могут быть присоединены условия ограниченности при $y \to +\infty$ или $y \to -\infty$, условия ограниченности на некоторых прямых $y = y_s$, условия принципа предельного поглощения и т.п.

Дифференциально-разностные уравнения (3.2.2) – (3.2.3) сводятся к задаче Карлемана при помощи следующих операций :

1) Преобразование Лорана уравнения (3.2.2) по n.

Применим дискретное преобразование Лорана к (3.2.2) и, учитывая

$$La_{n-k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n-k}t^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n-k}t^{n-k}t^k = t^k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m t^m = t^k A(t) \ ,$$

получаем

$$\sum_{p=0}^{A}\sum_{q=0}^{B} a_{pq}(y) \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j\, t^{j-\frac{p}{2}}\, \frac{d^q U(t,y)}{dy^q} = G(t,y)\,, \quad |t| = 1\,, \tag{3.2.4}$$

причем, если p - нечетное, то $p = p + 1$ и t играет роль параметра.

2) Решение уравнения (3.2.4).

Общие решения уравнения (3.2.4) записываются отдельно для каждого промежутка $y_s < y < y_{s+1}$ и для лучей $y < y_1$, $y > y_n$.

$$U(t,y) = \sum_{k=1}^{B} U_{ks}(t,y)\, C_{ks}(t) + U_s^*(t,y)\ ,\ |t| = 1\,, \tag{3.2.5}$$

$$y_s < y < y_{s+1}\ ,\quad y_{N+1} = +\infty\ ,\quad y_0 = -\infty\ ,\quad s = 0,1,\ldots,N-1,N\ .$$

Где $U_s^*(t,y)$ – известные функции (частные решения неоднородного уравнения), $U_{ks}(t,y)$ – известные функции (частные решения однородного уравнения); $C_{ks}(t)$ – неизвестные функции параметра t.

3) Формулировка условий для функции $U(t,y)$, вытекающих из условий ограниченности, поглощения и т.п. Удовлетворение полученных условий путем наложения ограничений на функции $C_{ks}(t)$; некоторые из этих функций приходится иногда полагать равными нулю. Число оставшихся неизвестных функций $C_{ks}(t)$ при корректной постановке задачи должно равняться $m_1+\ldots+m_n$, где m_s – число краевых условий (3.2.3) на прямой $y = y_s$.

4) Получение задачи Карлемана .

Введем новые функции

$$\psi_{nrs} = \sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\left[\gamma_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j\, \frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s+0)}{dy^q} + \right.$$
$$\left. + \delta_{pqrs}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j\, \frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s-0)}{dy^q}\right] - g_{nrs}\ ,$$

$$\varphi_{nrs} = \sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\left[\alpha_{pqrs}\ \sum_{j=0}^{p}\ (-1)^j C_p^j\, \frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s+0)}{dy^q} + \right.$$

$$+ \beta_{pqrs} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s-0)}{dy^q} \Bigg] - g_{nrs} \ ,$$

$$h_{nrs} = \sum_{p=0}^{P} \sum_{q=0}^{Q} \Bigg[\mu_{pqrs} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s+0)}{dy^q} +$$

$$+ \nu_{pqrs} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+\frac{p}{2}-j}(y_s-0)}{dy^q} \Bigg] - g_{nrs} \ ,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad r = 1, \ldots, m_s; \quad s = 1, \ldots, N \ . \qquad (3.2.6)$$

К граничным условиям (3.2.3) применим преобразование Лорана и, учитывая введенные функции (3.2.6), получим

$$c_{rs} H_{rs}(t) + a_{rs} \Phi_{rs}(Rt) + b_{rs} \Psi_{rs}(R^{-1}t) = 0 \quad , \quad |t| = 1 \ , \qquad (3.2.7)$$

где

$$\Psi_{rs}(t) = \sum_{p=0}^{P} \sum_{q=0}^{Q} \Bigg[\gamma_{pqrs} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j t^{j-\frac{p}{2}} \frac{d^q U(t, y_s+0)}{dy^q} +$$

$$\delta_{pqrs} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j t^{j-\frac{p}{2}} \frac{d^q U(t, y_s-0)}{dy^q} \Bigg] - g_{nrs} \ ,$$

$$\Phi_{rs}(t) = \sum_{p=0}^{P} \sum_{q=0}^{Q} \Bigg[\alpha_{pqrs} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j t^{j-\frac{p}{2}} \frac{d^q U(t, y_s+0)}{dy^q} +$$

$$+ \beta_{pqrs} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j t^{j-\frac{p}{2}} \frac{d^q U(t, y_s-0)}{dy^q} \Bigg] - g_{nrs} \ ,$$

$$H_{rs}(t) = \sum_{p=0}^{P} \sum_{q=0}^{Q} \Bigg[\mu_{pqrs} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j t^{j-\frac{p}{2}} \frac{d^q U(t, y_s+0)}{dy^q} +$$

$$+ \nu_{pqrs} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j t^{j-\frac{p}{2}} \frac{d^q U(t, y_s-0)}{dy^q} \Bigg] - g_{nrs} \ ,$$

$$r = 1, \ldots, m_s; \quad s = 1, \ldots, N.$$

Далее подставляем общее решение (3.2.5) в уравнение (3.2.7) и исключаем все неизвестные функции кроме $C_{ks}(t)$. В результате получим матричную ЗК в кольце относительно функций $C_{ks}(t)$.

$$\sum_{k=1}^{B} [P_{rsk}(Rt) C_{ks}(Rt) + M_{rsk}(R^{-1}t) C_{ks}(R^{-1}t) + T_{rsk}(t) C_{ks}(t)] = W_{rs}(t), |t| = 1 \ , \qquad (3.2.8)$$

где $s = \overline{1, N}$ – количество границ; $r = \overline{1, m_s}$ – количество условий на границе s, $P_{rsk}(z),\ M_{rsk}(z),\ T_{rsk}(z),\ W_{rs}(z)$ – известные функции в кольце $R^{-1} < |z| < R,$ где $0 < R,$ $C_{ks}(z)$ – неизвестные функции в кольце $R^{-1} < |z| < R,\ 0 < R.$

Замечание 3.1 *Если решение* $C_{rs}(t)$ *задачи (3.2.8) получено, то решение* $u_n(y)$ *исходной задачи (3.2.2)–(3.2.3) находится обратным преобразованием Лорана по формуле* $u_n(y) = (L^{-1}U(t, y))(t),$ *причем* $U(t, y)$ – *определенно равенствами (3.2.5).*

Выводы

В настоящем разделе линейные дифференциальные уравнения с полиномиальными и экспоненциальными коэффициентами сводятся к многоэлементной ЗК для полосы, а дифференциально-разностные уравнения сводятся к матричной ЗК в кольце.

В подразделе 3.1. из линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка с полиномиальными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n} t^k(\alpha_{k,-l}t^{-l} + \ldots + \alpha_{k,l}t^l)y^{(k)}(t) = h(t)\ ,\ t\ \geq\ 0\ ,$$

где $\alpha_{k,m} \in \mathcal{C}\ ,\ k = \overline{0, n}\ ,\ m = \overline{-l, l}\ ,\ 1 \leq n < \infty,$ произведя замену переменной $t = e^x,$ и применяя преобразование Фурье, получаем многоэлементную задачу Карлемана для полосы $-l < Imz < l$

$$\sum_{m=-l}^{l} A_m(x)F(x - mi)\ =\ \sum_{m=-l}^{l} G(x - mi)\ .$$

Аналогичный результат получен и для линейного дифференциального уравнения с экспоненциальными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=-l}^{l} \alpha_{k,m}e^{-mx}f^{(k)}(x)\ =\ h(x)\ ,\ x \in \mathcal{R}\ .$$

В подразделе 3.2. класс дифференциально - разностных уравнений

$$\sum_{p=0}^{A} \sum_{q=0}^{B} a_{pq}(y) \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j \frac{d^q u_{n+p/2-j}(y)}{dy^q} = g_n(y) \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ ,$$

где A, B - целые положительные числа, $A + B$ - порядок дифференциально - разностного уравнения, $a_{pq}(y),\ g_n(y)$ – заданные функции, $u_n(y)$ – искомая функция, сведён к матричной ЗК в кольце относительно функций $C_{ks}(t)$.

$$\sum_{k=1}^{B} [P_{rsk}(Rt)C_{ks}(Rt) + M_{rsk}(R^{-1}t)C_{ks}(R^{-1}t) + T_{rsk}(t)C_{ks}(t)] = W_{rs}(t),\ |t| = 1 \ ,$$

где $s = \overline{1, N}$ – количество границ; $r = \overline{1, m_s}$ – количество условий на границе s , $P_{rsk}(z),\ M_{rsk}(z),\ T_{rsk}(z), ;\ W_{rs}(z)$ – известные функции в кольце $R^{-1} < |z| < R,$ где $0 < R,\ C_{ks}(z)$ – неизвестные функции в кольце $R^{-1} < |z| < R, 0 < R.$

РАЗДЕЛ 4
ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ N- ГО ПОРЯДКА

В разделе III линейные дифференциальные уравнения (3.1.1) и (3.1.8) сведены к ЗК для полосы (3.1.7) и (3.1.10) соответственно. Основываясь на результатах подраздела 2.4., решение ЗК в полосе строится приближенным методом. Однако, большой практический и теоретический интерес представляет возможность построения точного решения. Эта глава посвящена построению точных решений, рассматриваемых дифференциальных уравнений, а в заключении предлагается пример, иллюстрирующий метод приближённого решения.

4.1. Линейные дифференциальные уравнения с полиномиальными и экспоненциальными коэффициентами, разрешимые в квадратурах

Накладывая на дифференциальное уравнение (3.1.1) условия

$l = 1\ ,\ \alpha_{k,1} = 0\ ,\ \alpha_{k,0} \neq 0\ ,\ \alpha_{k,-1} \neq 0\ ,$ получим

$$\sum_{k=0}^{n} t^k(\alpha_k t^{-1} + \beta_k)\, y^{(k)}(t) \ = \ h(t) \ \ , \ \ t \ \geq \ 0 \ \ , \qquad (4.1.1)$$

где $\alpha_k \in \mathcal{R},\ \beta_k \in \mathcal{R},\ k = \overline{0,n},\ 1 \leq n < \infty,$ а при наложении условий $l = 1,\ \alpha_{k,1} \neq 0,\ \alpha_{k,0} = 0,\ \alpha_{k,-1} \neq 0,$ получим

$$\sum_{k=0}^{n} t^k(\alpha_k t^{-1} + \beta_k t)\, y^{(k)}(t) \ = \ h(t) \ \ , \ t \ \geq \ 0 \ \ , \qquad (4.1.2)$$

где $\alpha_k \in \mathcal{R}\ ,\ \beta_k \in \mathcal{R}\ ,\ k = \overline{0,n}\ ,\ 1 \leq n < \infty.$

На линейное дифференциальное уравнение с экспоненциальными коэффициентами (3.1.8) накладываем аналогичные условия $l = 1, \alpha_{k,1} = 0, \alpha_{k,0} \neq 0,$ $\alpha_{k,-1} \neq 0,$ или $l = 1,\ \alpha_{k,1} \neq 0,\ \alpha_{k,0} = 0,\ \alpha_{k,-1} \neq 0,$ получаем соответствующие дифференциальные уравнения:

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k e^{-x} + \beta_k)\, y^{(k)}(x) \;=\; g(x)\;,\; -\infty < x < +\infty\;, \tag{4.1.3}$$

где $\alpha_k \in \mathcal{R},\ \beta_k \in \mathcal{R}, \qquad k = \overline{0,n};$

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k e^{-x} + \beta_k e^{x})\, y^{(k)}(x) \;=\; g(x)\;,\; -\infty < x < +\infty\;, \tag{4.1.4}$$

где $\alpha_k \in \mathcal{R},\ \beta_k \in \mathcal{R}, \qquad k = \overline{0,n}.$

Линейные дифференциальные уравнения (4.1.1) - (4.1.4) исследуются в настоящем подразделе.

4.1.1. Построение решения линейного однородного дифференциального уравнения, соответствующего (4.1.1) .

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} t^k (\alpha_k t^{-1} + \beta_k)\, y^{(k)}(t) \;=\; 0\;,\; t \;\geq\; 0\;, \tag{4.1.5}$$

где $\alpha_k \in \mathcal{R}, \beta_k \in \mathcal{R}, k = \overline{0,n}\,, \alpha_n \neq 0,\ \beta_n \neq 0.$

Неизвестная функция $y(t)$ ищется из пространства обобщённых функций $L_2\{0,1\}$.

Определение 4.1. [12,стр.261] *Через* $L_2\{\,0,1\,\}$ *обозначим пространство обобщённых функций, которые после интегрирования (под воздействием оператора* $\left(\frac{d}{dt}+1\right)^{-1}$*) становятся обычными функциями пространства* $L_2(R)$.

Для построения решения линейного однородного дифференциального уравнения сделаем замену $t = e^x$ и введем функцию $y(t(x)) = f(x)$. Используя (3.1.2) и (3.1.3), из (4.1.5) получим

$$(\alpha_0 e^{-x} + \beta_0) f(x) + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k e^{-x} + \beta_k) \sum_{j=1}^{k} s_j^k f^{(j)}(x) = 0,\ -\infty < x < +\infty, \tag{4.1.6}$$

которое эквивалентно уравнению

$$e^{-x} \sum_{k=0}^{n} c_k\, f^{(k)}(x) \;+\; \sum_{k=0}^{n} d_k\, f^{(k)}\,(x) \;=\; 0\;,\; -\infty < \,x\, < +\infty\;, \tag{4.1.7}$$

где новые коэффициенты выражаются следующим образом

$$c_0 = \alpha_0 \; ; \; c_k = \sum_{j=k}^{n} \alpha_j \, s_k^j \; , \; k = \overline{1,n} \; ,$$

$$d_0 = \beta_0 \; ; \; d_k = \sum_{j=k}^{n} \beta_j \, s_k^j \; , \; k = \overline{1,n} \quad . \tag{4.1.8}$$

Применяя к (4.1.7) преобразование Фурье в пространстве обобщённых функций [12,стр.265], получим

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(-i(x+i))^k \, F(x+i) \; + \; \sum_{k=0}^{n} d_k(-ix)^k \, F(x) \; = \; 0 \; , \tag{4.1.9}$$

где $F(x) = V(f(x))$.

Используя биномиальное разложение, уравнение (4.1.9) примет вид

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \, F(x+i) \; + \; \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \, F(x) \; = \; 0 \; , \tag{4.1.10}$$

где

$$a_k \; = \; (-i)^k \sum_{j=k}^{n} c_j \, C_j^k \; ; \; b_k \; = \; (-i)^k \, d_k \; , \; k = \overline{0,n} \; , \tag{4.1.11}$$

$C_j^k -$ коэффициент биномиального разложения.

Заметим: $a_0 = \sum\limits_{j=0}^{n} c_j, \; a_n = (-i)^n \alpha_n, \; b_0 = \beta_0, \; b_n = (-i)^n \beta_n.$

Далее предположим, что многочлен $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ на вещественной оси не имеет корней, тогда из (4.1.10) получим функциональное уравнение

$$F(x+i) \; = \; - \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} b_k \, x^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \, x^k} \, F(x) \quad , \tag{4.1.12}$$

которое эквивалентно

$$F(x+i) \; = \; - \frac{\beta_n}{\alpha_n} \, A(x) \, F(x) \quad , \tag{4.1.13}$$

где

$$A(x) \; = \; \frac{x^n \; + \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k b_k / b_n}{x^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k a_k / a_n} \quad . \tag{4.1.14}$$

Будем рассматривать нормальный случай, когда дробно-рациональные функции $A(x)$ и $A^{-1}(x)$ отличны от нуля на вещественной оси.

Принимая во внимание выше сказанное, функция $A(x)$ будет обладать следующими свойствами:

1) $A(x) \;=\; 1 + D(x) \neq 0$; (4.1.15)

2) $Ind\, A(x) \;=\; 0$ (корни комплексно - сопряженные) ; (4.1.16)

3) $D(x) \;=\; \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b_k}{b_n} - \frac{a_k}{a_n}\right)x^k\right) \;/\; \left(x^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{a_n}x^k\right)$. (4.1.17)

Функция $D(x)$ непрерывна на $(-\infty;+\infty)$ и стремится к нулю на бесконечности. Благодаря условиям (4.1.15), (4.1.16), можно выбрать такую ветвь логарифма, что функция $M(x) = ln\,[1 + D(x)]$ будет непрерывной и $M(\pm\infty) = 0$.

Для решения однородной задачи Карлемана (4.1.13) необходимо найти функцию $X(z)$ – аналитическую в полосе $0 < Imz < 1$ и ограниченную в замкнутой полосе $0 \leq Imz \leq 1$ такую, чтобы

$$A(x) = 1 + D(x) = \frac{X(x+i)}{X(x)}. \tag{4.1.18}$$

Факторизацию (4.1.18) будем выполнять по методу Ю.И.Черского, изложенному в монографии [12,стр.268]. Для этой цели достаточно предположить, чтобы

1) $D(x) \in L_2\,]-\infty;+\infty[$ – это выполняется автоматически ;

2) $xD(x) \in L_2\,]-\infty;+\infty[$ – это будет выполняться только при условии

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} - \frac{a_{n-1}}{a_n} \;=\; 0 \;\; .$$

Из последнего, учитывая переобозначения (4.1.8) и (4.1.11), получим

$$\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \;=\; C_n^{n-1} \;\; , \tag{4.1.19}$$

где $C_n^{n-1}-$ коэффициент разложения бинома.

Будем предполагать, что условие (4.1.19) выполняется, тогда функция X(x) находится по формуле

$$X(x) \;=\; exp\left(-\frac{lnA(x)}{2} - \frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{lnA(t)}{th\pi(x-t)}dt\right) \;\; . \tag{4.1.20}$$

Итак, ЗК (4.1.13), с учетом (4.1.18), примет вид

$$\frac{F(x)}{X(x)} \;=\; -\,\frac{\alpha_n}{\beta_n}\,\frac{F(x+i)}{X(x+i)} \quad . \tag{4.1.21}$$

Применяя к (4.1.21) обратное преобразование Фурье, получим:

$$\psi(x)\,\left(1+\frac{\alpha_n}{\beta_n}\,e^{-x}\right) \;=\; 0 \quad , \tag{4.1.22}$$

где

$$\psi(x) \;=\; V^{-1}\left(\frac{F(x)}{X(x)}\right)(x) \;=\; V^{-1}(\Psi(x))(x) \quad . \tag{4.1.23}$$

Если $sgn\alpha_n \;=\; sgn\beta_n,$ то уравнение (4.1.22) имеет только тривиальное решение: $\psi(x) \;\equiv\; 0.$ Рассмотрим случай $sgn\alpha_n \;=\; -sgn\beta_n,$ тогда в классе обобщенных функций уравнение (4.1.22) имеет решение:

$$\psi(x) \;=\; C\,\delta(x-x_0) \quad , \tag{4.1.24}$$

где $C = const,\; x_0 \;=\; -ln(\,-\beta_n\,/\,\alpha_n\,),\; \delta(x)$ – дельта функция. Отсюда

$$\Psi(x) \;=\; \frac{F(x)}{X(x)} \;=\; \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ixx_o}$$

и следовательно

$$F(x) \;=\; \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\,X(x)\,e^{ixx_o} \quad . \tag{4.1.25}$$

Далее, функцию $F(x)$ представим в виде

$$F(x) \;=\; \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ixx_o} \;+\; \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\,\Phi(x)\,e^{ixx_o} \quad , \tag{4.1.26}$$

где $\Phi(x) \;=\; X(x)-1,$ причем $\Phi(x) \;=\; o(D(x)).$ К равенству (4.1.26) применим обратное преобразование Фурье, в результате получим

$$f(x) \;=\; C\delta(x-x_0) \;+\; C\varphi(x-x_0) \quad , \tag{4.1.27}$$

где $\varphi(x) = (V^{-1}\Phi(x))(x),\; \varphi(x) \in L_2,\; C = const.$

Далее, возвращаясь к старой переменной $t,$ находим окончательное решение уравнения (4.1.5)

$$y(t) \;=\; C\delta\left(t+\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) \;+\; C\varphi\left[ln\left(-\frac{\beta_n}{\alpha_n}\,t\right)\right], \tag{4.1.28}$$

причем, так как $\delta(x) \in L_2\{0,1\}$, то $y(t) \in L_2\{0,1\}$. Итак:

Теорема 4.1 *Пусть коэффициенты* $\alpha_k \in \mathcal{R},\ \beta_k \in \mathcal{R},\ k = \overline{0,n}$ *линейного однородного дифференциального уравнения (4.1.5) таковы, что:*

1) $sgn\alpha_n = -sgn\beta_n$;

2) $A(x) \neq 0$;

3) $\beta_{n-1}/\beta_n - \alpha_{n-1}/\alpha_n = C_n^{n-1}$,

тогда частное решение уравнения (4.1.5) определяется из (4.1.28), где

$$\varphi(x) = (V^{-1}\Phi(x))(x) \ ; \ \Phi(x) = X(x) - 1 \ ,$$

$$X(x) = exp\left(-\frac{lnA(x)}{2} - \frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{lnA(t)}{th\pi(x-t)}dt\right) .$$

Представляет большой интерес случай, когда факторизация (4.1.18) выполняется элементарно, без привлечения формулы (4.1.20).

Здесь и дальше, в случае элементарной факторизации, предполагаем, что n - чётное. Итак, факторизацию дробно-рациональной функции (4.1.14) будем искать в виде

$$A(x) = \prod_{k=1}^{n/2}\frac{X_k\,(\,x\,+\,i\,)}{X_k\,(\,x\,)} \ ,$$

где

$$X_k\,(x) = \frac{x - z_1^{(k)}}{x - z_2^{(k)}} \ , \ z_1^{(k)}\,,\,z_2^{(k)} \in \mathcal{C} \ , \ k = \overline{1,n/2} \ .$$

Рассмотрим отдельно числитель и знаменатель дробно - рациональной функции $A(x)$, которые имеют четный порядок и вещественные коэффициенты, и предположим, что: $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(n)}$ – все корни числителя (в силу предположения нормальности исходной функции все корни комплексно - сопряженные) ; $x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_2^{(n)}$ – все корни знаменателя (комплексно - сопряженные). Теперь, если выполняются условия:

1) $Re\,x_1^{(j)} = Re\,x_2^{(j)}$, $j = \overline{1,n}$;

2) $Im\,x_1^{(j)} = Im\,x_2^{(j)} - 1$, $Im\,x_1^{(j+1)} - 1 = Im\,x_2^{(j+1)}$,

$j = 1\,,3\,,5\,,\ldots\,,n-1$,

то простую факторизацию осуществить удаётся.

Итак, аналитические функции $X_k(x)$ в полосе $0 \le Im x \le 1$ построены, где все неизвестные коэффициенты определяются следующим образом:

$$z_1^{(k)} = Re\, x_1^{(2k-1)} + i\, Im\, x_2^{(2k-1)} \ ,$$

$$z_2^{(k)} = Re\, x_2^{(2k-1)} + i\, Im\, x_1^{(2k)} \ , \ k = \overline{1, n/2} \ .$$

В этом случае формула (4.1.26) примет вид

$$F(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} e^{ixx_o} + \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \left(\sum_{k=1}^{n/2} \frac{B_k}{x - z_2^{(k)}} \right) e^{ixx_o} \ , \tag{4.1.29}$$

где коэффициенты $B_1, B_2, \ldots, B_{n/2}$ находятся из условия равенства двух многочленов

$$\sum_{k=0}^{n/2-1} (u_k - v_k)\, x^k = \sum_{j=1}^{n/2} B_j \prod_{k=1, k \ne j}^{n/2} (x - z_2^{(k)}) \ ,$$

где u_k- коэффициенты многочлена $n/2$ порядка построенного по формулам Виета из корней $z_1^{(k)}$, а v_k- коэффициенты многочлена $n/2$ порядка построенного из корней $z_2^{(k)}$.

К уравнению (4.1.29) применим обратное преобразование Фурье в пространстве обобщённых функций. В результате получим

$$f(x) = C\, \delta\, (x - x_0) + C\, i \sum_{k=1}^{n/2} f_k(x) \ , \tag{4.1.30}$$

где

$$f_k(x) = \begin{cases} B_k\, sgn\, (Im\, (z_2^{(k)}))\, e^{-ixz_2^{(k)}}\, e^{ix_0 z_2^{(k)}} \eta\, (x - x_0) & , \ Im\, (z_2^{(k)}) \ne 0 \\ -B_k\, sgn\, (x - x_0) & , \ Im\, (z_2^{(k)}) = 0. \end{cases}$$

Здесь и дальше $\eta\,(x)$ -единичная функция Хевисайда.

Теперь, возвращаясь к старой переменной, окончательно получаем

$$y(t) = C\delta \left(t + \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right) + Ci \sum_{k=1}^{n/2} y_k(t) \ , \ t \ge 0 \ , \tag{4.1.31}$$

где

$$y_k\,(t) = \begin{cases} B_k\, sgn\, \left(Im\, (z_2^{(k)}) \right)\, t^{-iz_2^{(k)}}\, \left(-\frac{\alpha_n}{\beta_n} \right)^{iz_2^{(k)}}\, \eta\, \left(t\, +\, \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right) & ,\quad Im\,(\, z_2^{(k)}\,) \neq 0 \\ -B_k\, sgn\, \left(t\, +\, \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right) & ,\quad Im\,(\, z_2^{(k)}\,) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, имеет место:

Теорема 4.2 *Пусть коэффициенты* $\alpha_k \in \mathcal{R},\ \beta_k \in \mathcal{R},\ k = \overline{0, n}$ *линейного однородного дифференциального уравнения (4.1.5) таковы, что:*

1) $sgn\alpha_n \,=\, -sgn\beta_n$;

2) $A(x) \,\neq\, 0$;

3) $\beta_{n-1}\,/\,\beta_n \,-\, \alpha_{n-1}\,/\,\alpha_n \,=\, C_n^{n-1}$

и корни числителя и знаменателя дробно - рациональной функции $A(x)$ *таковы, что:*

4) $Re\, x_1^{(j)} \,=\, Re\, x_2^{(j)}$, $j \,=\, \overline{1, n}$;

5) $Im\, x_1^{(j)} \,=\, Im\, x_2^{(j)} \,-\, 1$, $Im\, x_1^{(j+1)} \,-\, 1 \,=\, Im\, x_2^{(j+1)}$,

$j \,=\, 1\,,\,3\,,\,5\,,\,\ldots\,,\,n-1$,

тогда решение уравнения (4.1.5) строится по формуле (4.1.31).

4.1.2. Построение решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (4.1.1).

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} t^k(\alpha_k t^{-1} + \beta_k) y^{(k)}(t) = h(t)\ ,\ t\, \geq\, 0\ , \tag{4.1.32}$$

где $\alpha_k,\ \beta_k \in \mathcal{R},\ k = \overline{0, n},\ \alpha_n \neq 0,\ \beta_n \neq 0,$ а функция $t^{-1/2}h(t) \in L_2(R_+)$. Произведем замену $t \,=\, e^x$ и введем новые функции $y(t(x)) \,=\, f(x)$, $h(t(x)) = g(x)$. Учитывая формулы (3.1.2), (3.1.3) и (4.1.8), (4.1.11), из дифференциального уравнения (4.1.32) получим ЗК для полосы $0 < Imz < 1$:

$$F(x+i)\, +\, \frac{\beta_n}{\alpha_n} A(x)\, F(x) \,=\, Q(x)\ ,\ -\infty < x < +\infty\ , \tag{4.1.33}$$

где $F(x) = V(f(x)), G(x) = V(g(x)),$ $Q(x) = G(x)/\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k,$ а функция A(x) определяется формулой (4.1.14) и допускает факторизацию (4.1.18).

Тогда краевое условие (4.1.33) запишем в виде

$$\Psi(x+i) + \lambda_0 \Psi(x) = \bar{Q}(x)\ ,\ \ -\infty < x < +\infty \quad , \tag{4.1.34}$$

где $\Psi(z) = F(z)/X(z)$, $0 < Imz < 1$, $\bar{Q}(x) = Q(x)/X(x+i)$, $\lambda_0 = \beta_n/\alpha_n$, $X(z)$ определяется формулой (4.1.20). Далее применяя к (4.1.34) обратное преобразование Фурье V^{-1}, получим

$$e^{-x}\psi(x) + \lambda_0\psi(x) = \bar{q}(x)\ ,$$

отсюда

$$\psi(x) = \frac{\bar{q}(x)}{e^{-x} + \lambda_0}\ . \tag{4.1.35}$$

Если $\lambda_0 < 0$, для того, чтобы $\psi(x) \in L_2(R)$, необходимо чтобы выполнялось условие $\bar{q}(x_0) = 0$, где $x_0 = -ln(-\beta_n/\alpha_n)$, и тогда $y(x) \in L_2(R)$. В противном случае $\psi(x) \in L_2\{0,1\}$ и, следовательно, $y(x) \in L_2\{0,1\}$.

Итак,

$$\Psi(x) = V(\psi(x)) = V\left(\tfrac{\bar{q}(x)}{(e^{-x}+\lambda_0)}\right), \qquad F(x) = \Psi(x)\,X(x).$$

$$f(x) = V^{-1}(\Psi(x)\,X(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-s)V^{-1}(X(x))(s)ds. \tag{4.1.36}$$

Таким образом, справедлива:

Теорема 4.3 *Пусть коэффициенты* $\alpha_k \in \mathcal{R}$, $\beta_k \in \mathcal{R}$, $k = \overline{0,n}$ *линейного неоднородного дифференциального уравнения (4.1.32) таковы:*

1) $A(x) \neq 0$;

2) $\beta_{n-1}/\beta_n - \alpha_{n-1}/\alpha_n = C_n^{n-1}$,

тогда решение уравнения (4.1.32) строится по формуле $y(t) = f(lnt)$, *где f(x) определяется с помощью (4.1.36). Следующие условия определяют принадлежность решения к определенному пространству*

3a) $sgn\alpha_n = sgn\beta_n$;

3b) $sgn\alpha_n = -sgn\beta_n$ и $\bar{q}(x_0) = 0$, $x_0 = -ln(-\beta_n/\alpha_n)$;

3c) $sgn\alpha_n = -sgn\beta_n$, и $\bar{q}(x_0) \neq 0$;

Если выполняется 3a) или 3b), то $y(t) \in L_2(R)$.

Если же выполняется 3c), то $y(t) \in L_2\{0,1\}$.

4.1.3. Построение решения линейного однородного дифференциального уравнения, соответствующего (4.1.2).

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} t^k\,(\,\alpha_k t^{-1} + \beta_k t)\,y^{(k)}(t) \;=\; 0 \;\;,\;\; t \ge 0 \;\;, \qquad (4.1.37)$$

где $\alpha_k \in \mathcal{R},\ \beta_k \in \mathcal{R}, k = \overline{0,n},\ \alpha_n \ne 0,\ \beta_n \ne 0.$

Неизвестная функция $y(t)$ ищется из пространства обобщённых функций $L_2\{0,1\}$. Методика построения решения такая же, как и в пункте 4.1.1. Сформулируем выводы в виде

Теорема 4.4 *Пусть коэффициенты* $\alpha_k \in \mathcal{R},\, \beta_k \in \mathcal{R},\, k = \overline{0,n}$ *линейного однородного дифференциального уравнения (4.1.37) таковы, что:*

1) $sgn\alpha_n \;=\; -sgn\beta_n$;

2) $A(x) \;\ne\; 0$;

3) $\beta_{n-1}\,/\,\beta_n \,-\, \alpha_{n-1}\,/\,\alpha_n \;=\; 2C_n^{n-1}$,

тогда частное решение уравнения (4.1.37) определяется так

$$y(t) \;=\; C\delta\left(t \,-\, \sqrt{-\frac{\alpha_n}{\beta_n}}\right) \;+\; C\varphi\left[ln\left(\sqrt{-\frac{\beta_n}{\alpha_n}\,t}\right)\right] \;, \qquad (4.1.38)$$

где $C = const,\;\; \varphi(x) = (V^{-1}\Phi(x))(x),\; \Phi(x) \;=\; X(x) - 1.$

$$X(x) \;=\; exp\left(-\frac{i}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} lnA(t)\,th\frac{\pi}{2}\,(x-t)\,dt\right) \qquad (4.1.39)$$

$$A(x) \;=\; \frac{x^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k\,b_k/b_n}{x^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k a_k/a_n} \quad . \qquad (4.1.40)$$

$$a_k \;=\; (-i)^k \sum_{j=k}^{n} c_j\,C_j^k \quad ; \quad b_k \;=\; i^k \sum_{j=k}^{n} (-1)^j\,d_j\,C_j^k \quad , \quad k = \overline{0,n} \quad , \qquad (4.1.41)$$

$C_j^k -$ *коэффициент биномиального разложения,* $c_k\,,\, d_k\;,\; k = \overline{0,n}$ *определяются по формуле (4.1.8).*

Здесь, как и в пункте 4.1.1., имеет место возможность простой факторизации. Сформулируем результаты исследований.

Теорема 4.5 *Пусть коэффициенты* $\alpha_k \in \mathcal{R}$, $\beta_k \in \mathcal{R}$, $k = \overline{0, n}$ *линейного однородного дифференциального уравнения (4.1.37) таковы, что:*

1) $sgn\alpha_n = -sgn\beta_n$;

2) $A(x) \neq 0$;

3) $\beta_{n-1} / \beta_n - \alpha_{n-1} / \alpha_n = 2\, C_n^{n-1}$

и корни числителя и знаменателя дробно-рациональной функции $A(x)$ *таковы, что:*

4) $Re\, x_1^{(j)} = Re\, x_2^{(j)}$, $j = \overline{1, n}$;

5) $Im\, x_1^{(j)} = Im\, x_2^{(j)} - 1$, $Im\, x_1^{(j+1)} - 1 = Im\, x_2^{(j+1)}$,

$j = 1, 3, 5, \ldots, n-1$,

тогда решение уравнения (4.1.37) строится по формуле

$$y(t) = C\, \delta \left(t - \sqrt{-\frac{\alpha_n}{\beta_n}} \right) + C\, i \sum_{k=1}^{n/2} y_k\,(t) \quad , \quad t \geq 0, \tag{4.1.42}$$

где

$$y_k\,(t) = \begin{cases} B_k\, sgn \left(Im\,(z_2^{(k)}) \right) t^{-iz_2^{(k)}} \left(-\frac{\alpha_n}{\beta_n} \right)^{iz_2^{(k)}/2} \eta \left(t - \sqrt{-\frac{\alpha_n}{\beta_n}} \right) , & Im\,(\, z_2^{(k)}\,) \neq 0 \\ -B_k\, sgn \left(t - \sqrt{-\frac{\alpha_n}{\beta_n}} \right) , & Im\,(\, z_2^{(k)}\,) = 0 \end{cases}$$

$$z_2^{(k)} = Re\, x_2^{(2k-1)} + i\, Im\, x_1^{(2k)} \quad , \quad k = \overline{1, n/2} \; .$$

4.1.4.Построение решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (4.1.2) .

Теперь изучается линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} t^k (\alpha_k t^{-1} + \beta_k t) y^{(k)}(t) = h(t) \; , \; t \geq 0 \; , \tag{4.1.43}$$

где $\alpha_k \in \mathcal{R}, \beta_k \in \mathcal{R}, k = \overline{0,n}, \alpha_n \neq 0, \beta_n \neq 0,$ функция $t^{-1/2}h(t) \in L_2(R_+)$. Произведем замену $t = e^x$ и введем новые функции $y(t(x)) = f(x)$, $h(t(x)) = g(x)$. Учитывая формулы (3.1.2), (3.1.3) и (4.1.8), (4.1.41), из дифференциального уравнения (4.1.43) получим задачу Карлемана для полосы $-1 < Imz < 1:$

$$F(x+i) + \frac{\beta_n}{\alpha_n} A(x)\, F(x-i) \;=\; Q(x)\;,\; -\infty < x < +\infty\;, \tag{4.1.44}$$

где $F(x) = V(f(x))$, $G(x) = V(g(x))$, $Q(x) = G(x)/\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, функция $A(x)$ определяется формулой (4.1.14) и допускает факторизацию

$$A(x) \;=\; 1 + D(x) \;=\; \frac{X(x+i)}{X(x-i)}\;.$$

Таким образом, краевое условие (4.1.44) примет вид

$$\Psi(x+i) \,+\, \lambda_0\, \Psi(x-i) \;=\; \bar{Q}(x)\;,\; -\infty < x < +\infty\;, \tag{4.1.45}$$

где

$$\Psi(z) \;=\; \frac{F(z)}{X(z)}\quad,\quad -1 < Imz < 1\;\;,\; \bar{Q}(x) \;=\; \frac{Q(x)}{X(x+i)}\;\;,\;\; \lambda_0 \;=\; \frac{\beta_n}{\alpha_n}\quad,$$

$X(z)-$ определяется формулой (4.1.39).

Далее, применяя к (4.1.45) обратное преобразование Фурье V^{-1}, получим

$$e^{-x}\,\psi(x) \,+\, \lambda_0\, e^x\, \psi(x) \;=\; \bar{q}(x)\;,$$

отсюда

$$\psi(x) \;=\; \frac{\bar{q}(x)}{e^{-x} \,+\, \lambda_0\, e^x}\;. \tag{4.1.46}$$

Если $\lambda_0 < 0,$ для того, чтобы $\psi(x) \in L_2(R)$ необходимо, чтобы выполнялось условие $\bar{q}(x_0) = 0$, где $x_0 = \frac{1}{2}\, ln\left(-\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$ и тогда $y(x) \in L_2(R)$. В противном случае $\psi(x) \in L_2\{0,1\}$ и , следовательно, $y(x) \in L_2\{0,1\}$. Итак,

$$\Psi(x) \;=\; V(\psi(x)) \;=\; V\left(\bar{q}(x)/(e^{-x} \,+\, \lambda_0\, e^x\,)\right)\;,\; F(x) \;=\; \Psi(x)\, X(x)\quad.$$

$$f(x) \;=\; V^{-1}\,(\,\Psi(x)\,X(x)\,) \quad . \tag{4.1.47}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4.6 *Пусть коэффициенты* $\alpha_k \in \mathcal{R},\ \beta_k \in \mathcal{R}, k = \overline{0,n}$ *линейного неоднородного дифференциального уравнения (4.1.43) таковы:*

1) $A(x) \;\neq\; 0$;

2) $\beta_{n-1}\,/\,\beta_n \;-\; \alpha_{n-1}\,/\,\alpha_n \;=\; 2\,C_n^{n-1}$;

тогда решение уравнения (4.1.43) строится по формуле $y(t) \,=\, f(lnt)$, *где f(x) определяется с помощью (4.1.47). Следующие условия определяют принадлежность решения к определенному пространству*

3a) $sgn\alpha_n \;=\; sgn\beta_n;$

3b) $sgn\alpha_n \;=\; -sgn\beta_n,$ и $\bar{q}(x_0) = 0, \qquad x_0 \;=\; \frac{1}{2}\,ln\left(-\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$;

3c) $sgn\alpha_n \;=\; -sgn\beta_n,$ и $\bar{q}(x_0) \neq 0;$

Если выполняется 3a) или 3b), то $y(t) \in L_2(R)$,

Если же выполняется 3c), то $y(t) \in L_2\{0,1\}$.

4.1.5. О связи дифференциальных уравнений (4.1.3), (4.1.4) с дифференциальными уравнениями (4.1.1), (4.1.2).

Уравнения (4.1.3), (4.1.4) с уравнениями (4.1.1), (4.1.2) связаны между собой заменой переменной $t = e^x$. И поэтому все результаты пп. 4.1.1., 4.1.2., 4.1.3., 4.1.4. переносятся и на уравнения (4.1.3), (4.1.4) соответственно однородные и неоднородные. Сформулируем лишь соответствующие теоремы.

5a) Выпишем линейное однородное дифференциальное уравнение, соответствующее (4.1.3).

$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k e^{-x} + \beta_k) y^{(k)}(x) = 0\ ,\ -\infty < x < +\infty\ , \tag{4.1.48}$$

где $\alpha_k\, \in \mathcal{R}, \beta_k\, \in \mathcal{R}\,, k = \overline{0,n}, \alpha_n \neq 0,\ \beta_n \neq 0.$ Неизвестная функция $y(x)$ ищется из пространства обобщенных функций $L_2\{0,1\}$. Дифференциальное уравнение (4.1.48) соответствует уравнению (4.1.3), если положить

$$c_k = \alpha_k \; ; \; d_k = \beta_k \; , \; k = \overline{0,n} \; ; \; f(x) = y(x) \; .$$

Таким образом, имеют место:

Теорема 4.7 *Пусть коэффициенты* $\alpha_k \in \mathcal{R}, \beta_k \in \mathcal{R}, k = \overline{0,n}$ *линейного однородного дифференциального уравнения (4.1.48) таковы, что:*

1) $sgn\alpha_n \; = \; -sgn\beta_n \; ;$

2) $A(x) \; \neq \; 0 \; ;$

3) $\beta_{n-1} \, / \, \beta_n \; - \; \alpha_{n-1} \, / \, \alpha_n \; = \; C_n^{n-1},$

тогда частное решение уравнения (4.1.48) определяется формулой

$$y(x) \; = \; C\delta(x - x_0) \; + \; C\varphi(x - x_0) \; ,$$

где $C = const \; ; \; \varphi(x) = (V^{-1}\Phi(x))(x) \; ; \; \Phi(x) \; = \; X(x) - 1 \; ,$

$x_0 \; = \; -ln\left(-\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right) \; ,$ $X(x)-$ *определяется формулой (4.1.20).*

Теорема 4.8 *Пусть коэффициенты* $\alpha_k \in \mathcal{R}, \beta_k \in \mathcal{R}, k = \overline{0,n}$ *линейного однородного дифференциального уравнения (4.1.48) таковы, что:*

1) $sgn\alpha_n \; = \; -sgn\beta_n \quad ;$

2) $A(x) \; \neq \; 0 \; ;$

3) $\beta_{n-1} \, / \, \beta_n \; - \; \alpha_{n-1} \, / \, \alpha_n \; = \; C_n^{n-1}$

и корни числителя и знаменателя дробно - рациональной функции $A(x)$ *таковы, что:*

4) $Re\, x_1^{(j)} \; = \; Re\, x_2^{(j)} \;\; , \;\; j \; = \; \overline{1,n} \;\; ;$

5) $Im\, x_1^{(j)} \; = \; Im\, x_2^{(j)} \; - \; 1 \;\; , \; Im\, x_1^{(j+1)} \; - \; 1 \; = \; Im\, x_2^{(j+1)} \;\; ,$

$j \; = \; 1 \, , \, 3 \, , \, 5 \, , \, \ldots \, , \, n - 1 \;\; ,$

тогда решение уравнения (4.1.48) определяется по формуле

$$f(x) \; = \; C \, \delta \, (\, x \, - \, x_0 \,) \; + \; C \, i \sum_{k=1}^{n/2} f_k \, (x) \quad , \qquad (4.1.49)$$

где

$$f_k(x) \;=\; \begin{cases} B_k\, sgn\,(\,Im\,(\,z_2^{(k)}\,)\, e^{-ixz_2^{(k)}}\, e^{ix_0 z_2^{(k)}} \eta\,(\,x\,-\,x_0\,) & ,\;\; Im\,(\,z_2^{(k)}\,)\;\neq\;0 \\ -B_k\, sgn\,(\,x\,-\,x_0\,) & ,\;\; Im\,(\,z_2^{(k)}\,)\;=\;0 \end{cases}$$

$$x_0 \;=\; -ln\left(-\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right) \quad ,$$

$$z_2^{(k)} \;=\; Re\, x_2^{(2k-1)} \;+\; i\, Im\, x_1^{(2k)} \;\;,\;\; k \;=\; \overline{1, n/2} \;\; .$$

5b) Запишем линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k e^{-x}+\beta_k)y^{(k)}(x)=g(x)\ ,\ -\infty<x<+\infty\ , \tag{4.1.50}$$

где $\alpha_k \in \mathcal{R},\ \beta_k \in \mathcal{R},\ k = \overline{0,n},\ \alpha_n \neq 0,\ \beta_n \neq 0.$ Функция $g(x)$ из пространства $L_2(R)$.

Теорема 4.9 *Пусть коэффициенты* $\alpha_k \in \mathcal{R},\ \beta_k \in \mathcal{R},\ k = \overline{0,n}$ *линейного неоднородного дифференциального уравнения (4.1.50) таковы:*

1) $A(x) \;\neq\; 0\;;$

2) $\beta_{n-1}\,/\,\beta_n \;-\; \alpha_{n-1}\,/\,\alpha_n \;=\; C_n^{n-1},$

тогда решение уравнения (4.1.50) определяется формулой

$$y(x) \;=\; V^{-1}\,(\Psi(x)\,X(x))\ ,$$

где

$$\psi(x) \;=\; \frac{\bar{q}(x)}{e^{-x}\,+\,\lambda_0}\;;\; \bar{q}(x) \;=\; V^{-1}(\bar{Q}(x)) \;=\; V^{-1}\left(\frac{Q(x)}{X(x+i)}\right)\;;$$

$$\Psi(x) \;=\; V(\psi(x))\,;\; Q(x) \;=\; \frac{G(x)}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k}\;;\; G(x) = V(g(x))\ ,$$

X(z) – определяется из (4.1.20). Следующие условия определяют принадлежность решения к определенному пространству

3a) $sgn\alpha_n \;=\; sgn\beta_n;$

3b) $sgn\alpha_n \;=\; -sgn\beta_n,$ и $\bar{q}(x_0) = 0,$ $\quad x_0 \;=\; -ln\left(-\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)\;;$

3c) $sgn\alpha_n \;=\; -sgn\beta_n,$ и $\bar{q}(x_0) \neq 0.$

Если выполняется 3a) или 3b), то $y(x) \in L_2(R)$.

Если же выполняется 3c), то $y(x) \in L_2\{0,1\}$.

5c) Запишем линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k e^{-x} + \beta_k e^{x})y^{(k)}(x) = 0\ ,\ -\infty < x < +\infty\ , \qquad (4.1.51)$$

где $\alpha_k \in \mathcal{R},\ \beta_k \in \mathcal{R}, k = \overline{0,n},\ \alpha_n \neq 0,\ \beta_n \neq 0.$ Неизвестная функция $y(x)$ ищется из пространства обобщённых функций $L_2\{0,1\}$.

Теорема 4.10 *Пусть коэффициенты* $\alpha_k \in \mathcal{R},\ \beta_k \in \mathcal{R},\ k = \overline{0,n}$ *линейного однородного дифференциального уравнения (4.1.51) таковы, что:*

1) $sgn\alpha_n = -sgn\beta_n$;

2) $A(x) \neq 0$;

3) $\beta_{n-1} / \beta_n - \alpha_{n-1} / \alpha_n = 2\,C_n^{n-1}$,

тогда частное решение уравнения (4.1.51) запишем так

$$y(x) = C\delta(x - x_0) + C\varphi(x - x_0)\ ,$$

где $C = const$; $\varphi(x) = (V^{-1}\Phi(x))(x)$; $\Phi(x) = X(x) - 1$,

$x_0 = \frac{1}{2}ln\left(-\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$, $X(x)-$ *определяется формулой (4.1.39).*

Теорема 4.11 *Пусть коэффициенты* $\alpha_k \in \mathcal{R},\ \beta_k \in \mathcal{R},\ k = \overline{0,n}$ *линейного однородного дифференциального уравнения (4.1.51) таковы, что:*

1) $sgn\alpha_n = -sgn\beta_n$;

2) $A(x) \neq 0$;

3) $\beta_{n-1} / \beta_n - \alpha_{n-1} / \alpha_n = C_n^{n-1}$

и корни числителя и знаменателя дробно - рациональной функции $A(x)$ *таковы, что:*

4) $Re\, x_1^{(j)} = Re\, x_2^{(j)}$, $j = \overline{1,n}$;

5) $Im\, x_1^{(j)} = Im\, x_2^{(j)} - 1$, $Im\, x_1^{(j+1)} - 1 = Im\, x_2^{(j+1)}$,

$j = 1, 3, 5, \ldots, n-1$,

тогда решение уравнения (4.1.51) определяется по формуле

$$f(x) = C\,\delta\,(\,x\,-\,x_0\,)\;+\;C\,i\sum_{k=1}^{n/2} f_k\,(x)\;, \tag{4.1.52}$$

где

$$f_k\,(x) = \begin{cases} B_k\,sgn\,(Im\,(z_2^{(k)})\,e^{-ixz_2^{(k)}}\,e^{ix_0 z_2^{(k)}}\eta\,(\,x\,-\,x_0\,) & ,\;\; Im\,(\,z_2^{(k)}\,)\;\neq\;0 \\ -B_k\,sgn\,(\,x\,-\,x_0\,) & ,\;\; Im\,(\,z_2^{(k)}\,)\;=\;0 \end{cases},$$

$x_0\;=\;\frac{1}{2}ln\left(-\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\;,\;z_2^{(k)}\;=\;Re\,x_2^{(2k-1)}\;+\;i\,Im\,x_1^{(2k)},\;\;k\;=\;\overline{1,n/2}.$

5d) Запишем линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k e^{-x}+\beta_k e^{x})y^{(k)}(x) = g(x)\;,\;-\infty < x < +\infty\;, \tag{4.1.53}$$

где $\alpha_k\,\in\,\mathcal{R},\;\beta_k\,\in\,\mathcal{R}, k\,=\,\overline{0,n},\;\alpha_n\,\neq\,0,\;\beta_n\,\neq\,0.$ Функция $g(x)$ из пространства $L_2(R)$.

Теорема 4.12 *Пусть коэффициенты* $\alpha_k \in \mathcal{R},\, \beta_k \in \mathcal{R},\; k = \overline{0,n}$ *линейного неоднородного дифференциального уравнения (4.1.53) таковы:*

1) $A(x)\;\neq\;0;$

2) $\beta_{n-1}\,/\,\beta_n\;-\;\alpha_{n-1}\,/\,\alpha_n\;=\;2\,C_n^{n-1},$

тогда решение уравнения (4.1.53) определяется формулой

$$y(x)\;=\;V^{-1}\,(\Psi(x)\,X(x))\;,$$

где

$$\psi(x)\;=\;\frac{\bar{q}(x)}{e^{-x}\;+\;\lambda_0\,e^{x}}\;;\;\lambda_0\;=\;\frac{\beta_n}{\alpha_n}\;;\;\bar{q}(x)\;=\;V^{-1}(\bar{Q}(x))\;=\;V^{-1}\left(\frac{Q(x)}{X(x+i)}\right)\;;$$

$$Q(x)\;=\;\frac{G(x)}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k x^k}\;\;;\;\;G(x)\;=\;V(g(x))\;\;;\;\;\Psi(x)\;=\;V(\psi(x))\quad,$$

X(z) – определяется из (4.1.39). Следующие условия определяют принадлежность решения к определенному пространству:

3a) $sgn\alpha_n\;=\;sgn\beta_n;$

3b) $sgn\alpha_n = -sgn\beta_n,$ и $\bar{q}(x_0) = 0,$ $x_0 = \frac{1}{2}ln\left(-\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$;

3c) $sgn\alpha_n = -sgn\beta_n\,,$ и $\bar{q}(x_0) \neq 0;$

Если выполняется 3a) или 3b), то $y(x) \in L_2(R).$

Если же выполняется 3c), то $y(x) \in L_2\{0,1\}.$

4.1.6. Примеры решения линейных однородных дифференциальных уравнений (4.1.5) и (4.1.48).

В качестве примера рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\sum_{k=0}^{4} t^k(\alpha_k t^{-1} + \beta_k)\, y^{(k)}(t) \;=\; 0 \;\;,\;\; t \,\geq\, 0 \;\;, \tag{4.1.54}$$

где $\alpha_0 = 24,\ \alpha_1 = 12,\ \alpha_2 = -12,\ \alpha_3 = 2,\ \alpha_4 = 1;$

$\beta_0 = -4,\ \beta_1 = 4,\ \beta_2 = -2,\ \beta_3 = -6,\ \beta_4 = -1.$

Неизвестная функция $y(t)$ ищется из пространства обобщенных функций $L_2\{0,1\}$. Дробно-рациональная функция (4.1.14) примет вид

$$A\,(x) \;=\; \frac{x^4 \,+\, 5\,x^2 \,+\, 4}{x^4 \,+\, 13\,x^2 \,+\, 36} \;\;.$$

Находим корни числителя и знаменателя:

$x_1^{(1)} = i,\ x_1^{(2)} = -i,\ x_1^{(3)} = 2\,i,\ x_1^{(4)} = -2\,i;$

$x_2^{(1)} = 2\,i,\ x_2^{(2)} = -2\,i,\ x_2^{(3)} = 3\,i,\ x_2^{(4)} = -3\,i.$

Так как все условия теоремы 4.12 выполняются, можем записать решение дифференциального уравнения (4.1.54) и, согласно (4.1.31), оно имеет вид

$$y(t) \;=\; \delta\;(\,t\,-\,1\,)\;+\;(\,12\,t^{-1}\;-\;20\,t^{-2}\,)\,\eta\;(\,t\,-\,1\,)\quad.$$

Теперь выпишем линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка, соответствующее (4.1.48):

$$\sum_{k=0}^{4}(\alpha_k e^{-x} + \beta_k)y^{(k)}(x) = 0\;,\; -\infty < x < +\infty\;, \tag{4.1.55}$$

где $\alpha_0 = 36,\ \alpha_1 = -2,\ \alpha_2 = 5,\ \alpha_3 = -4,\ \alpha_4 = 1;$

$\beta_0 = -4,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 5,\ \beta_3 = 0,\ \beta_4 = -1.$

При указанных коэффициентах, учитывая взаимосвязь дифференциальных уравнений (4.1.1) и (4.1.3), нетрудно проверить выполнимость условий Теоремы 4.8, таким образом решение дифференциального уравнения (4.1.55) определяется формулой

$$y(x) = \delta(x) + \left(12\, e^{-x} - 20\, e^{-2x}\right) \eta(x) \ . \tag{4.1.56}$$

Замечание 2.1. *Решение уравнений (4.1.1)-(4.1.4) искалось в классе обобщенных функций, поэтому запись уравнений (4.1.1)-(4.1.4) условна. Исходя из строгой постановки рассматриваемой проблемы, уравнение (4.1.3) выглядело бы так:*

$$\left(\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k e^{-x} + \beta_k)\, y^{(k)}(x)\, ,\, \psi(x) \right) = (\, g(x)\, ,\, \psi(x)\,)\ ,\ -\infty < x < +\infty\ ,$$

где $\psi(x)$ *– основная фунуция. В нашем случае достаточно предположить, что* $\psi(x)$, *с учетом оператора сдвига* $W(x) = x - x_0$, *принадлежит пространству* $L_2\{-1, 0\}$ *(см.[12]).*

4.2. Линейное однородное дифференциальное уравнение с осциллирующими коэффициентами

Изучается линейное однородное дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k e^{i\gamma x} + \beta_k e^{-i\gamma x}) y^{(k)}(x) = 0\ ,\ x \in \mathcal{R}\ , \tag{4.2.1}$$

где $\alpha_k,\ \beta_k \in \mathcal{C},\ k = \overline{0, n},\ \gamma \in \mathcal{R},\ \gamma > 0.$

Неизвестная функция $y(x)$ ищется из пространства обобщённых функций $L_2\{0, n\}$.

4.2.1. Сведение к функциональному уравнению.

К уравнению (4.2.1) применим преобразование Фурье и, используя свойства [12,стр.16]

$$V(e^{i\gamma x} y^{(k)}(x)) = (-i(x + \gamma))^k Y(x + \gamma)$$

$$V(e^{-i\gamma x}y^{(k)}(x)) = (-i(x-\gamma))^k Y(x-\gamma)\ ,$$

получим функциональное уравнение вида

$$\sum_{k=0}^{n} [\, \alpha_k(-i(x+\gamma))^k\, Y(x+\gamma) + \beta_k(-i(x-\gamma))^k\, Y(x-\gamma)] \;=\; 0\,,\;\; x \in \mathcal{R}\ . \quad (4.2.2)$$

Введем функции

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(-i(x+\gamma))^k \quad , \quad B(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k(-i(x-\gamma))^k\,,$$

тогда (4.2.2) примет вид

$$A(x)Y(x+\gamma) + B(x)Y(x-\gamma) = 0\,,\;\; x \in \mathcal{R}\,, \qquad (4.2.3)$$

причем $Y(z) \in L_2\{n, 0\}$.

Сделаем замену $s = x - \gamma,\ s \in \mathcal{R},$ и потребуем, чтобы выполнялось $A(x) \neq 0, B(x) \neq 0$ на всей вещественной оси, тогда из (4.2.3) получим функциональное уравнение

$$Y(s+2\gamma) = C(s)Y(s)\ ,\;\; s \in \mathcal{R}\ , \qquad (4.2.4)$$

где $C(s) = -\frac{B(s+\gamma)}{A(s+\gamma)}$.

Функция сдвига $\alpha(s) = s+2\gamma$ есть сохраняющий ориентацию гомеоморфизм R на себя, $\alpha(s)$ имеет две неподвижные точки $-\infty, +\infty$. Если $\alpha_l = \alpha[\alpha_{l-1}(s)]$, причём $\alpha_0(s) = s$, то последовательность $\{\alpha_l(s)\}$, где $\alpha_l(s) = s+2\gamma l$, при произвольном $s \in \mathcal{R}$ сходится к одной из неподвижных точек $-\infty$ или $+\infty$. Для определённости предполагаем, что

$$\lim_{l\to+\infty} \alpha_l(s) = +\infty \quad , \quad \lim_{l\to-\infty} \alpha_l(s) = -\infty\ .$$

Из (4.2.4) легко получить рекурентные формулы

$$Y(s+2\gamma m) = \prod_{l=0}^{m-1} C(s+2\gamma l)Y(s)\ ,\;\; m = 1, 2, \ldots, \qquad (4.2.5)$$

$$Y(s-2\gamma m) = \frac{Y(s)}{\prod\limits_{l=1}^{m} C(s-2\gamma l)}\ ,\;\; m = 1, 2, \ldots. \qquad (4.2.6)$$

Введем функции

$$P^m(s) = \prod_{l=0}^{m-1} C(s+2\gamma l) \ , \ m = 1,2,\ldots, \ s \in (-\infty,+\infty] \ , \qquad (4.2.7)$$

$$P^{-m}(s) = \prod_{l=1}^{m} C(s-2\gamma l) \ , \ m = 1,2,\ldots, \ s \in [-\infty,+\infty) \ . \qquad (4.2.8)$$

Заметим, что

$$P^0(s) \equiv 1 \ , \ \forall s \in \mathcal{R} \ . \qquad (4.2.9)$$

Предположим, что существуют

$$P^{+\infty}(s) = \lim_{m\to+\infty} P^m(s) \ , \ P^{-\infty}(s) = \lim_{m\to-\infty} P^{-m}(s) \ . \qquad (4.2.10)$$

Далее изучаются фукциональные последовательности (4.2.7) и (4.2.8).

4.2.2. Анализ на сходимость $P^m(s)$, $P^{-m}(s)$.

Учитывая (4.2.7) и (4.2.8), из (4.2.10) получим бесконечные произведения

$$P^{+\infty}(s) = \prod_{l=0}^{+\infty} C(s+2\gamma l) \, , \qquad (4.2.11)$$

$$P^{-\infty}(s) = \prod_{l=1}^{+\infty} C(s-2\gamma l) \, . \qquad (4.2.12)$$

Для исследования сходимости функциональной последовательности (4.2.7) выпишем l- член бесконечного произведения (4.2.11)

$$C(s+2\gamma l) \ = \ -\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k (-i)^k (s+2\gamma l)^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k (-i)^k (s+2\gamma(l+1))^k} \, . \qquad (4.2.13)$$

Для удобства потребуем

$$\sum_{k=0}^{n} \beta_k (-i)^k (s+2\gamma l)^k \ = \ \sum_{k=0}^{n} \omega_k(s) l^k \qquad (4.2.14)$$

и, используя формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \ ,$$

получим

$$\omega_k(s) = \sum_{p=k}^{n} \beta_p (-i)^p (2\gamma)^k C_p^{p-k} s^{p-k} \ , \ k = \overline{0,n} \, . \qquad (4.2.15)$$

Если в (4.2.14) положить $l = 0$, то учитывая $C_0^0 = C_n^n = 1$, получим

$$\omega_0(s) = \sum_{p=0}^{n} \beta_p (-i)^p s^p \ . \tag{4.2.16}$$

Аналогичное потребуем и для знаменателя

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (-i)^k (s + 2\gamma(l+1))^k = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k(s) l^k \ , \tag{4.2.17}$$

тогда

$$\sigma_k(s) = \sum_{t=k}^{n} C_t^{t-k} (2\gamma)^t \sum_{p=t}^{n} \alpha_p (-i)^p C_p^{p-t} s^{p-t} \ , \ k = \overline{o,n} \ . \tag{4.2.18}$$

При $l = 0$ (4.2.18) примет вид

$$\sigma_0(s) = \sum_{t=0}^{n} (2\gamma)^t \sum_{p=t}^{n} \alpha_p (-i)^p C_p^{p-t} s^{p-t} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (-i)^k (s + 2\gamma)^k \ . \tag{4.2.19}$$

Из (4.2.15), (4.2.18) легко получить

$$\omega_n = \beta_n (-2\gamma i)^n \ , \ \sigma_n = \alpha_n (-2\gamma i)^n \ . \tag{4.2.20}$$

Итак, l -ый член бесконечного произведения (4.2.11), записанный в виде (4.2.13), примет следующий вид

$$C(s + 2\gamma l) \ = \ - \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \omega_k(s) l^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \sigma_k(s) l^k} \ . \tag{4.2.21}$$

Необходимым условием сходимости бесконечного произведения (4.2.11), согласно [43,стр.273], будет

$$\lim_{l \to +\infty} C(s + 2\gamma l) = 1 \ , \tag{4.2.22}$$

таким образом,

$$\lim_{l \to +\infty} \left(- \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \omega_k(s) l^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \sigma_k(s) l^k} \right) = \ - \ \frac{\omega_n}{\sigma_n} \ = \ 1 \ ,$$

тогда необходимое условие сходимости (4.2.11) можно записать в следующем виде $\omega_n = -\sigma_n$, а т.к. имеет место (4.2.20), то окончательно

$$\alpha_n \ = \ - \ \beta_n \ . \tag{4.2.23}$$

При выполнении необходимого условия сходимости (4.2.23) l-ый член (4.2.21) примет вид

$$C(s+2\gamma l) = 1 + \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-\omega_k(s)-\sigma_k(s))l^k}{\sum\limits_{k=0}^{n}\sigma_k(s)l^k}\ , \quad l=0,1,2,\dots\ . \tag{4.2.24}$$

Бесконечное произведение (4.2.11) примет вид

$$P^{+\infty}(s)\ =\ \prod_{l=0}^{+\infty}\left(1+\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-\omega_k(s)-\sigma_k(s))l^k}{\sum\limits_{k=0}^{n}\sigma_k(s)l^k}\right)\ . \tag{4.2.25}$$

Согласно [43,стр.277], для абсолютной и равномерной сходимости (4.2.25) на множестве $(-\infty,+\infty]$ достаточно, чтобы выполнялось

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-\omega_k(s)-\sigma_k(s))l^k}{\sum\limits_{k=0}^{n}\sigma_k(s)l^k}\right| <\ \varepsilon_l\ , \tag{4.2.26}$$

где ε_l - член сходящегося ряда.

Так как левая часть неравенства (4.2.26) ведет себя как $1/l$, то для выполнения достаточного условия равномерной и абсолютной сходимости ряда (4.2.11) нам необходимо потребовать $\omega_{n-1} = -\sigma_{n-1}$, что с учетом (4.2.15), (4.2.18) означает

$$(-i)^{n-1}(\beta_{n-1}+\alpha_{n-1}-iC_n^1 2\gamma\alpha_n) = 0\ . \tag{4.2.27}$$

Итак, при выполнении необходимого условия (4.2.23) и достаточного условия (4.2.27) бесконечное произведение (4.2.11) сходится абсолютно и равномерно на $(-\infty,+\infty]$. Сделаем выводы:

Утверждение 4.1 *Если выполняются условия (4.2.23) и (4.2.27), то бесконечное произведение (4.2.11) сходится абсолютно и равномерно везде на* $(-\infty,+\infty]$, *причём*

$$P^{+\infty}(s)\ =\ \prod_{l=0}^{+\infty}\left(1+\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-2}(-\omega_k(s)-\sigma_k(s))l^k}{\sum\limits_{k=0}^{n}\sigma_k(s)l^k}\right)\ , \tag{4.2.28}$$

последнее эквивалентно

$$P^{+\infty}(s) = exp\left(\sum_{l=0}^{+\infty} ln\left(1 + \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-2}(-\omega_k(s) - \sigma_k(s))l^k}{\sum\limits_{k=0}^{n}\sigma_k(s)l^k}\right)\right) \ . \qquad (4.2.29)$$

Аналогичные выводы имеют место и для (4.2.12).

Утверждение 4.2 *Если выполняются условия (4.2.23) и (4.2.27), то бесконечное произведение (4.2.12) сходится абсолютно и равномерно везде на* $[-\infty, +\infty)$, *причём*

$$P^{-\infty}(s) = \prod_{l=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-2}(-\omega_k(s) - \sigma_k(s))(-1)^k l^k}{\sum\limits_{k=0}^{n}\sigma_k(s)l^k}\right) \ , \qquad (4.2.30)$$

последнее эквивалентно

$$P^{-\infty}(s) = exp\left(\sum_{l=1}^{+\infty} ln\left(1 + \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-2}(-\omega_k(s) - \sigma_k(s))(-1)^k l^k}{\sum\limits_{k=0}^{n}\sigma_k(s)l^k}\right)\right) \ . \qquad (4.2.31)$$

4.2.3. Построение множества корней.

В пункте 4.2.1. мы предположили, что у $C(s+2\gamma)$ не существуют действительные корни и полюса (наличие комплексных корней не исключалось), однако важным представляется случай, когда таковые существуют.

Рассмотрим многочлен

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k y^k = 0, \quad \alpha_k \in \mathcal{C}\ ,\ y \in \mathcal{R}\ . \qquad (4.4.32)$$

Представим $\alpha_k = Re\alpha_k + iIm\alpha_k$, тогда многочлен (4.2.32) можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{n} Re\alpha_k y^k + i\sum_{k=0}^{n} Im\alpha_k y^k = 0\,, \qquad (4.2.33)$$

отсюда

$$\sum_{k=0}^{n} Re\alpha_k y^k = 0 \ \ , \ \ \sum_{k=0}^{n} Im\alpha_k y^k = 0\ . \qquad (4.2.34)$$

Таким образом, те корни которые будут удовлетворять (4.2.34), естественно будут удовлетворять и (4.2.33) и (4.2.32).

Далле, с помощью алгоритма Евклида находим наибольший общий делитель (4.2.34). Результатом будет многочлен

$$\sum_{k=0}^{p} b_k y^k \ , \quad p \leq n \ ,$$

причем $p = n \Leftrightarrow Re\alpha_k = Im\alpha_k \ , \ k = \overline{0, n} \ , \ b_k \in \mathcal{R}$. Теперь нужно решить уравнение

$$\sum_{k=0}^{p} b_k y^k = 0 \ . \tag{4.2.35}$$

Отсюда находим корни $y_0, \ldots, y_p,$ среди этих корней могут быть как вещественные, так и комплексные, кроме того они могут совпадать. Выбираем только вещественные корни

$$y_1, \ldots, y_K \ , \ K \leq n \ . \tag{4.2.36}$$

Все числа (4.2.36) будут корнями многочлена (4.2.32).

Рассмотрим многочлен

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (y + 2\gamma l)^k = 0 \ , \ l = -\infty, \ldots, +\infty \,, \tag{4.2.37}$$

тогда, если набор (4.2.36)- действительные корни уравнения (4.2.32), то

$$y_1 - 2\gamma l, \ldots, y_K - 2\gamma l \ , \ l = -\infty, \ldots, +\infty \ , \tag{4.2.38}$$

действительные корни уравнения (4.2.37), причем очевидно, что при l=0 они совпадают.

Итак, нам достаточно знать действительные корни уравнения (4.2.32), чтобы построить действительные корни уравнения (4.2.37). Думается, что полезным будет алгоритм нахождения границы корней (4.2.32) без решения уравнения (4.2.35). Особенно это полезно когда n - достаточно большое число и решать уравнение (4.2.35) затруднительно.

Алгоритм нахождения границы корней (4.2.35) [9,стр.80]:

1) верхняя граница положительных корней $C_1 = 1 + \sqrt{k}\frac{B}{b_p}$, где $b_p > 0$, B - наибольшее число из модулей отрицательных коэффициентов, k- номер первого из отрицательных коэффициентов;

2) нижняя граница положительных коэффициентов $C_2 = \frac{1}{N_1}$, где N_1 – верхняя граница положительных коэффициентов многочлена $y^p \sum\limits_{k=0}^{p} \frac{b_k}{y^k}$;

3) верхняя граница отрицательных корней $C_3 = -\frac{1}{N_2}$, где N_2 – верхняя граница положительных коэффициентов многочлена $y^p \sum\limits_{k=0}^{p} \frac{b_k}{(-y)^k}$;

4) нижняя граница отрицательных корней $C_4 = -N_3$, где N_3 – верхняя граница положительных коэффициентов многочлена $\sum\limits_{k=0}^{p} b_k(-y)^k$.

Алгоритм:

Если $\exists C_1$ и $\exists C_3$, то отрезок найден $[C_1, C_3]$.

Если $\exists C_1$ и $\exists C_2$, то отрезок найдены $[C_1, C_2]$.

Если не $\exists C_1$, то отрезок найден $[C_3, C_4]$.

Таким образом, данный алгоритм позволяет найти отрезок нахождения корней $[\bar{C}, \tilde{C}]$. Он один из вышеперечисленных. Если

$$|\bar{C}, \tilde{C}| < 2\gamma \ , \tag{4.2.39}$$

то при любых l корни не пересекаются, в противном случае отрезки корней при различных l пересекаются, более того, они могут совпадать.

Для многочлена

$$\sum_{k=0}^{n} \beta_k(-i)^k s^k$$

проделаем операции (4.2.32) – (4.2.36) и получим набор действительных корней

$$\{s_1^*, \ldots, s_{K^1}^*\} \quad . \tag{4.2.40}$$

Для многочлена

$$\sum_{k=0}^{n} \beta_k(-i)^k (s + 2\gamma l)^k \ , \ l = -\infty, \ldots, +\infty$$

набор корней будет следующим

$$s^*_{p,l} = s^*_p - 2\gamma l \ , \ p = \overline{1, K^1} \ , \ l = -\infty, \ldots, +\infty \ , \ K^1 \leq n \ . \tag{4.2.41}$$

Аналогичные операции проделаем для многочлена

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (-i)^k s^k \ ,$$

и получим набор действительных корней

$$\{\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_{K^1}\} \ . \tag{4.2.42}$$

Для

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (-i)^k (s + 2\gamma(l+1))^k \ , \ l = -\infty, \ldots, +\infty$$

набор корней будет следующим

$$\bar{s}_{p,l} = \bar{s}_p - 2\gamma(l+1) \ , \ p = \overline{1, K^2} \ , \ l = -\infty, \ldots, +\infty \ , \ K^2 \leq n \ . \tag{4.2.43}$$

Итак, для l -го члена бесконечного произведения (4.2.11)

$$C(s + 2\gamma l) = -\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k (-i)^k (s + 2\gamma l)^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k (-i)^k (s + 2\gamma(l+1))^k} \ , \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

корни в точках

$$s^*_{p,l} = s^*_p - 2\gamma l \ , \ p = \overline{1, K^1} \ , \ l = 0, 1, 2, \ldots \ , \ K^1 \leq n \ ; \tag{4.2.44}$$

полюса в точках

$$\bar{s}_{p,l} = \bar{s}_p - 2\gamma(l+1) \ , \ p = \overline{1, K^2} \ , \ l = 0, 1, 2, \ldots \ , \ K^2 \leq n. \tag{4.2.45}$$

Для l-го члена бесконечного произведения (4.2.12)

$$C(s - 2\gamma l) = -\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k (-i)^k (s - 2\gamma l)^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k (-i)^k (s - 2\gamma(l-1))^k} \ , \quad l = 1, 2, \ldots$$

корни в точках

$$s^*_{p,l} = s^*_p + 2\gamma l \ , \ p = \overline{1, K^1} \ , \ l = 1, 2, \ldots \ , \ K^1 \leq n \ ; \tag{4.2.46}$$

полюса в точках

$$\bar{s}_{p,l} = \bar{s}_p + 2\gamma(l-1)\ ,\ p = \overline{1, K^2},\ l = 1, 2, \dots\ ,\ K^2 \le n\ . \tag{4.2.47}$$

4.2.4. Поиск и построение точных решений.

a) Пусть в уравнении (4.2.4) $C(s) \equiv 1,\ \forall s \in \mathcal{R},$ что означает

$$-\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k (-i)^k s^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k (-i)^k (s+2\gamma)^k} \equiv 1\ . \tag{4.2.48}$$

Два многочлена равны, если равны их коэффициенты, т.о.

$$\beta_k(-i)^k + \sum_{p=k}^{n} \alpha_p (-i)^p (2\gamma)^{p-k} C_p^{p-k} \equiv 0\ . \tag{4.2.49}$$

Итак, при выполнении условия (4.2.49) функциональное уравнение (4.2.4) имеет своим решением константу

$$Y(s) \equiv C\ ,\quad C = const\ . \tag{4.2.50}$$

Далее рассмотрим случаи, когда $C(s) \neq 1,\ \forall s \in \mathcal{R}$.

b) У l -го члена (4.2.13) нет нулей и полюсов и, предположим, что выполняются утверждения 4.1 и 4.2, тогда мы находимся в условиях теоремы 1 работы [38] и имеет место лемма 1 (там же). Таким образом, функциональное уравнение (4.2.4) имеет единственное, непрерывное решение, отличное от нуля всюду на вещественной оси. Решение имеет вид

$$Y(s) = \begin{cases} P^{-\infty}(s) & ,\quad s \in [-\infty, s_*] \\ \frac{C}{P^{+\infty}(s)} & ,\quad s \notin [-\infty, s_*], \end{cases} \tag{4.2.51}$$

где s_* произвольная точка из $(-\infty, +\infty)$, $C = P^{-\infty}(s_*)P^{+\infty}(s_*)$.

c) Здесь рассмотрим случай, когда существуют действительные корни у числителя l -го члена (4.2.13) бесконечного произведения (4.2.11). В качестве ограниченного множества можем взять $[\bar{C}, \tilde{C}]$ к примеру, набор

(4.2.44) при $l = 0$. На этом отрезке содержится конечное число точек, а именно K^1, в которых функции последовательности (4.2.11) обращаются в нуль. Если выполняется (4.2.39), тогда достаточно взять $l = 1$, чтобы функции последовательности (4.2.11) не обращались в нуль на отрезке $[\bar{C}, \tilde{C}]$. Если же не выполняется условие (4.2.39), тогда l можно выбрать из условия $\tilde{C} - 2\gamma l > \bar{C}$. Таким образом, существует $l([\bar{C}, \tilde{C}])$, при которых ни одна из функций последовательности (4.2.11) не обращается в нуль на отрезке $[\bar{C}, \tilde{C}]$.

Ряд (4.2.11) при выполнении условий (4.2.23) и (4.2.27) сходится равномерно и абсолютно на всем $\mathcal{R}$, то он будет равномерно сходиться и на любом его подмножестве.

Замечание 4.2. *Бесконечное произведение (4.2.11) равномерно сходится внутри* $[-\infty, +\infty]$. *Тогда, оно представляет в этой области некоторую функцию, обращающуюся в нуль только в тех точках полуинтервала* $(-\infty, +\infty]$ *в которых обращается в нуль, по крайней мере, одна из функций последовательности (4.2.11). Такими точками будут корни числителя, набор которых дан формулой (4.2.44).*

Аналогичные рассуждения имеют место и для бесконечного произведения (4.2.12) с той лишь разницей, что точки, в которых функция будет обращаться в нуль, определяются набором (4.2.46).

Итак, решение функционального уравнения (4.2.4) определяется формулой (4.2.51). Точка s_*, при выполнении (4.2.39), находится из промежутка $(\tilde{C}, \bar{C} + 2\gamma)$, если не выполняется (4.2.39), то $s_* = \tilde{C} + \varepsilon$, где ε - сколь угодно малая положительная величина.

d) Теперь предположим, что у функции $C(s)$ существуют корни в знаменателе, тогда полный набор корней дается формулой (4.2.43). Тогда рассматриваем бесконечное произведение (4.2.11) и для него используем набор

(4.2.45) . Здесь справедливы все рассуждения, как и в случае наличия корней у числителя (5 с).

Определение 4.2. [18,стр.157] *Функция, регулярная в любой замкнутой части области D, за исключением конечного числа полюсов (они могут накапливаться к границе D), называется мероморфной в области D функцией.*

Функция $P^{+\infty}(s)$ в точках (4.2.45) будет иметь полюса, причем на каждой замкнутой части множества $\mathcal{R}$, конечное. Таким образом, функция $P^{\pm\infty}(s)$ будет мероморфной.

Если выполняется (4.2.39), тогда функциональное уравнение (4.2.4) имеет непрерывное и единственное решение, определяемое формулой
(4.2.51), причем точка $s_* \in (\tilde{C} - 2\gamma, \bar{C})$. Если не выполняется (4.2.39), тогда $s_* = \bar{C} - \varepsilon$ (ε - сколь угодно малая положительная величина) и функция (4.2.51) имеет нули в точках, попавших в отрезок $[\bar{C}, \tilde{C} - 2\gamma]$.

e) Особым случаем выделим наличие нулей и полюсов у функции C(s). Проделав операции для определения границы корней (п.4.2.3.), мы можем выделить отрезки $[\bar{C}^1, \tilde{C}^1]$, $[\bar{C}^2, \tilde{C}^2]$, соответственно для числителя и знаменателя. Если эти отрезки удовлетворяют условию (4.2.39), причем дополнительно

$$\bar{C}^1 + 2\gamma > \tilde{C}^2 - 2\gamma\,,$$

тогда $\exists \bar{s}_* \in (\tilde{C}^2 - 2\gamma\,,\, \bar{C}^1 + 2\gamma)$, такое, что решение (4.2.51) будет непрерывным не имеющим нулей и полюсов.

Во всех остальных случаях не достаточно знать только границы корней, т.к. в каждом промежутке будут находиться и нули, и полюса, кроме того они могут и совпадать. Поэтому, требуется знать точное значение корня и его порядок.

Заметим, что случаи c), d), e) в работе [38] не рассматривались.

f) Теперь предположим, что у рациональной функции $C(s)$ коэффициенты $\beta_n = 0$, $\alpha_n \neq 0$, тогда функциональные ряды (4.2.11) и (4.2.12) будут расходящимися. Причем, $P^m(s) \to 0$ при $m \to +\infty$ равномерно на всей области $(-\infty, +\infty]$, а $P^{-m}(s) \to 0$ при $m \to +\infty$ равномерно на всей области $[-\infty, +\infty)$. Далее предположим, что у $C(s)$ имеются действительные полюса, т.е. имеет место набор (4.2.47). Находясь в условиях теоремы работы [38] определим множества $l_1 = (-\infty, +\infty)$, а $l_2 = \bigcup\limits_{l=1}^{+\infty}\{s_{p,l} + 2\gamma(l-1)\}_{p=1}^{K^2}$ такие, что $l_1 \cap l_2 \neq 0$, тогда выполняется лемма 3. Для любой точки $s_* \in l_1 \cap l_2$ определяем множества $l_3 = l_1 \cap l_2 \cap [s_*, s_* + 2\gamma]$ и $l_4 = [s_*, s_* + 2\gamma] \backslash l_3$. Таким образом, l_3- множество точек пересечения l_1 l_2, которые находятся в промежутке $[s_*, s_* + 2\gamma]$, а l_4 - множество $[s_*, s_* + 2\gamma]$ без точек $l_1 \cap l_2$. Множество l_3 содержит минимум одну точку.

Бесконечное множество линейно – независимых непрерывных решений, согласно работе [38], записывается так

$$Y(s) = \begin{cases} Y_1(\xi)P^m(\xi) \quad , & s = \xi + 2\gamma m\,, \;\; \xi \in [s_*, s_* + 2\gamma] \\ \frac{Y_1(\xi)}{P^{-m}(\xi)} \quad , & s = \xi - 2\gamma m \;\;\; \xi \in [s_*, s_* + 2\gamma] \\ 0 \quad , & s = -\infty\,, \qquad s = +\infty\,, \end{cases} \tag{4.2.52}$$

где

$$Y_1(\xi) = \begin{cases} Y_0(\xi) \quad , & \xi \in l_3 \\ 0 \quad , & \xi \in l_4\,, \end{cases} \tag{4.2.53}$$

$Y_0(\xi)$ произвольная непрерывная функция, заданная на множестве l_2, такая, что $Y_1(\xi)$ непрерывна на сегменте $[s_*, s_* + 2\gamma]$ и выполняется условие

$$Y_1(s_* + 2\gamma) = C(s_*)Y_1(s_*) \quad .$$

Сформулируем вышеизложенные результаты в виде теорем:

Теорема 4.13. *Предположим, что функции*

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(-i(x+\gamma))^k \quad , \quad B(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k(-i(x-\gamma))^k \, ,$$

где $\alpha_k, \beta_k \in \mathcal{C}$, $k = \overline{0,n}$ *- коэффициенты линейного однородного дифференциального уравнения (4.2.1),* $\gamma \in \mathcal{R}$, $\gamma > 0$, *не имеют действительных корней. Тогда, если выполняется (4.2.48), то* $y(x) = C\sqrt{2\pi}\delta(x)$ *– решение уравнения (4.2.1) (случай a). Если же выполняются условия (4.2.23), (4.2.27), то решение уравнения (4.2.1) получается обратным преобразованием Фурье функции (4.2.51), где* s_* *- произвольное (случай b).*

Теорема 4.14. *Пусть*

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(-i(x+\gamma))^k \quad , \quad B(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k(-i(x-\gamma))^k \, ,$$

где $\alpha_k, \beta_k \in \mathcal{C}$, $k = \overline{0,n}$ *- коэффициенты линейного однородного дифференциального уравнения (4.2.1),* $\gamma \in \mathcal{R}$, $\gamma > 0$.

Предположим, что $A(x)$ *имеет действительные корни, а* $B(x)$ *не имеет и выполняются условия (4.2.23), (4.2.27), тогда решение уравнения (4.2.1) получается обратным преобразованием Фурье функции (4.2.51) со специальным выбором* s_* *(случай c).*

Теорема 4.15. *Пусть*

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(-i(x+\gamma))^k \quad , \quad B(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k(-i(x-\gamma))^k \, ,$$

где $\alpha_k, \beta_k \in \mathcal{C}$, $k = \overline{0,n}$ *- коэффициенты линейного однородного дифференциального уравнения (4.2.1),* $\gamma \in \mathcal{R}$, $\gamma > 0$.

Предположим, что $A(x)$ *не имеет действительных корней, а* $B(x)$ *имеет и выполняются условия (4.2.23), (4.2.27), тогда решение уравнения (4.2.1) получается обратным преобразованием Фурье функции (4.2.51) со специальным выбором* s_* *(случай d).*

Теорема 4.16. *Предположим, что*

$$A(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(-i(x+\gamma))^k \quad , \quad B(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k(-i(x-\gamma))^k \,,$$

где $\alpha_k,\,\beta_k\in\mathcal{C},\ k=\overline{0,n},$ *коэффициенты линейного однородного дифференциального уравнения (4.2.1),* $\gamma\in\mathcal{R},\,\gamma>0,$ *имеют действительные корни. Тогда, если выполняются условия (4.2.23), (4.2.27), то решение уравнения (4.2.1) получается обратным преобразованием Фурье функции (4.2.51) со специальным выбором* s_* *(случай e).*

Теорема 4.17. *Пусть*

$$A(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(-i(x+\gamma))^k \quad , \quad B(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k(-i(x-\gamma))^k \,,$$

где $\alpha_k,\,\beta_k\in\mathcal{C},\ k=\overline{0,n}$ *- коэффициенты линейного однородного дифференциального уравнения (4.2.1),* $\gamma\in\mathcal{R},\,\gamma>0.$

Предположим, что $\beta_n=0,\,\alpha_n\neq 0$ *и* $A(x)$ *не имеет действительных корней, а знаменатель функции* $C(x)$ *имеет, тогда решение уравнения (4.2.1) получается обратным преобразованием Фурье функции (4.2.52) (случай f).*

Замечание 4.3. *Полученные выше результаты переносятся и на линейное однородное дифференциальное уравнение* n *-го порядка*

$$\sum_{k=0}^{n}t^k(\alpha_k t^{i\gamma}+\beta_k t^{-i\gamma})\,y^{(k)}(t)\;=\;0\;\;,\;\;t\geq 0\quad, \tag{4.2.54}$$

где $\alpha_k\in\mathcal{R},\ \beta_k\in\mathcal{R},\ k=\overline{0,n},\ \gamma\in\mathcal{R}.$

Используя замену $t=e^x$ *и формулы (3.1.2), (3.1.3), (4.1.8), (4.1.11), из дифференциального уравнения (4.2.54) получаем линейное однородное дифференциальное уравнение (4.2.1).*

4.2.5. Пример. *Рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка*

$$[(\beta_1\gamma-\beta_0 i)\,sin\,x\gamma\;-\;\beta_1\gamma i\,cos\,x\gamma]\,y(x)\;-\;\beta_1 i\,sin\,x\gamma\;y'(x)\;=\;0\quad, \tag{4.2.55}$$

которое с помощью формул Эйлера приводится к линейному однородному дифференциальному уравнению вида (4.2.1)

$$\left((-\beta_0 - 2\gamma\beta_1 i)\, e^{i\gamma x} \;+\; \beta_0\, e^{-i\gamma x}\right) y(x) +$$

$$+ \left(-\beta_1\, e^{i\gamma x} \;+\; \beta_1\, e^{-i\gamma x}\right) y'(x) \;=\; 0, \quad x \in \mathcal{R}\,, \tag{4.2.56}$$

где $\beta_0,\, \beta_1 \,\in \mathcal{C},\ \gamma \in \mathcal{R},\ \gamma > 0.$ *Неизвестная функция y(x) ищется из пространства обобщённых функций* $L_2\{0,1\}$ *. Используя результаты пункта 4.2.1., из (4.2.56) получаем функциональное уравнение вида (4.2.4)*

$$Y(s+2\gamma) = C(s)Y(s)\ ,\ s \in \mathcal{R}\ , \tag{4.2.57}$$

где

$$C(s) \;=\; -\frac{\beta_0 - \beta_1 si}{-\beta_0 + \beta_1 si} \;\equiv\; 1\ ,\ \forall s \in \mathcal{R}\ \ . \tag{4.2.58}$$

Из функционального уравнения (4.2.57) получаем

$$Y(s+2\gamma) = Y(s)\ ,\quad \forall s \in \mathcal{R}\ , \tag{4.2.59}$$

Учитывая тот факт, что решением уравнения (4.2.59) может быть только постоянная, получаем

$$Y(s) \equiv C\ ,\quad C = const\ . \tag{4.2.60}$$

К (4.2.60) применяем обратное преобразование Фурье

$$V^{-1}C \;=\; C\sqrt{2\pi}\delta(x)$$

и получаем решение дифференциального уравнения (4.2.55)

$$y(x) \;=\; C\sqrt{2\pi}\delta(x)\ . \tag{4.2.61}$$

Предполагая, что $y(x) \;=\; \delta(x)$ *является решением дифференциального уравнения (4.2.1) при* $n \;=\; 1,$ *проверим что условия (4.2.23), (4.2.27) в действительности имеют место. Итак,*

$$(\alpha_0 e^{i\gamma x} + \beta_0 e^{-i\gamma x})\delta(x) + (\alpha_1 e^{i\gamma x} + \beta_1 e^{-i\gamma x})\delta'(x) = 0,\ x \in \mathcal{R}\ , \tag{4.2.62}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \in \mathcal{C}, \gamma \in \mathcal{R}, \gamma > 0$. *Функция* $\delta(x)$ *из пространства* $L_2\{0,1\}$. *Введем основную функцию* $\psi(x)$ *из пространства* $L_2\{0,-1\}$. *Уравнение (4.2.62) эквивалентно*

$$([(\alpha_0 e^{i\gamma x} + \beta_0 e^{-i\gamma x})\delta(x) + (\alpha_1 e^{i\gamma x} + \beta_1 e^{-i\gamma x})\delta^{'}(x)], \psi(x)) = 0\,,\ x \in \mathcal{R}. \quad (4.2.63)$$

Учитывая свойства обобщённых функций [67,стр.80]

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \psi) \ = \ \alpha_1(f_1, \psi) + \alpha_2(f_2, \psi) \ ,$$

$$(f', \psi) \ = \ -(f, \psi') \ \ , \ \ (\delta, \psi) \ = \ \psi(0) \ ,$$

из уравнения (4.2.63) получаем

$$(\alpha_0 + \beta_0 - i\gamma(\alpha_1 - \beta_1))\psi(0) - (\alpha_1 + \beta_1)\psi'(0) \ = \ 0 \ ,$$

а отсюда вытекают уже известные условия

$$\alpha_1 \ = \ -\beta_1 \ \ , \ \ \alpha_0 + \beta_0 + 2i\gamma\beta_1 \ = \ 0 \ .$$

4.3. Пример решения дифференциального уравнения методом Бубнова - Галёркина для полосы

В качестве примера решения дифференциального уравнения методом Бубнова - Галёркина для полосы рассматривается линейное неоднородное дифференциальное уравнения с экспоненциальными коэффициентами вида (3.1.8). Далее положив $l = 1, n = 2$ и

$\alpha_{2,1} = \alpha_{2,-1} = -1\ ,\ \alpha_{2,0} = -1\ ,$

$\alpha_{1,1} = 4\ ,\ \alpha_{1,-1} = 0\ ,\ \alpha_{1,0} = 0\ ,$

$\alpha_{0,1} = -4\ ,\ \alpha_{0,-1} = 0\ ,\ \alpha_{0,0} = 1\ ,$

из (3.1.8) получим дифференциальное уравнение

$$(1 - 4e^{-x})f(x) \ + \ 4e^{-x}f^{'}(x) \ + \ (-e^{x} - 1 - e^{-x})f^{"}(x) = h(x) \ . \qquad (4.3.1)$$

Для определённости правую часть положим равной

$$h(x) \;=\; \frac{1}{ch\,x \,+\, \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad .$$

Ищется приближённое решение поставленной задачи. Для этого задача (4.3.1), сводится к многоэлементной задаче Карлемана для полосы, а последняя решается методом, рассмотренным в пункте 2.4.3..

Итак, применяя прямое преобразование Фурье к (4.3.1) после элементарных преобразований, получим трехэлементную Задачу Карлемана для полосы

$$F(x+i) \;+\; \frac{(x+i)}{(x-i)}\,F(x) \;+\; F(x-i) \;=\; 2\sqrt{2\,\pi}\,\frac{sh\,\pi x/6}{sh\,\pi x}\;\frac{1}{(x-i)^2}\;, \qquad (4.3.2)$$

где коэффициенты – непрерывные функции на вещественной оси. Ищется неизвестная функция $F(z)$, аналитическая в полосе $|Imz| < 1$. Согласно теореме 3 работы [26] ЗК (4.3.2) имеет решение, причем единственное. Поскольку точное решение неизвестно, то приближённое решение ищем в виде (2.4.20), а так как $h(x) \in L_2\,(R)$, то $\alpha_0 \,=\, 0$ и тогда

$$F_n\,(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\,[\,\alpha_k^+\,\varphi_k^+\,(x) \;+\; \alpha_k^-\,\varphi_k^-\,(x)\,] \;\;, \qquad (4.3.3)$$

где $\alpha_k^\pm\,,\, k \,=\, \overline{1,n}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, а $\varphi_k^\pm\,(x)$ система функций вида (2.4.17) (при m=1), а $\alpha_0 \,=\, 0$ в силу того, что правая часть уравнения (4.3.2) принадлежит $L_2\,(R)$.

Неизвестные коэффициенты $\alpha_k^\pm\,,\, k \,=\, \overline{1,n}$ определяются решением системы (2.4.21).

Учитывая свойства функций $\varphi_k^\pm\,(x)$ и коэффициентов ЗК (4.3.2), система функций (2.4.21) упростится и приближённое решение (4.3.3) преобразуется в

$$F_n\,(x) \;=\; 2\sum_{k=1}^{n}\,\frac{Im\alpha_k^+\,(k+2)}{x^2+(k+2)^2} \quad . \qquad (4.3.4)$$

Вычисления проводились при $n = 6$ и $n = 10$. Результаты приведенны в таблицах табл.4.1 и табл.4.2 соответсвенно.

Таблица 4.1

Решение системы (n=6)

k-ая переменная	Значение α_k
1	-5.9967
2	38.2978
3	-104.0956
4	144.1319
5	-99.7326
6	27.3636

Таблица 4.2

Решение системы (n=10)

k-ая переменная	Значение α_k
1	-1.3707
2	17.0501
3	-102.7543
4	366.2111
5	-825.9278
6	1207.288
7	-1136.68
8	661.7365
9	-215.0312
10	29.4741

Подставляя полученые коэффициенты α_k^+ в (4.3.4), получаем приближенное решение ЗК (4.3.2). Решение дифференциального уравнения (4.3.1) получается обратным преобразованием Фурье функции (4.3.4).

Выводы

В подразделе 4.1. рассматриваются линейные дифференциальные уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} t^k(\alpha_k t^{-1} + \beta_k)\, y^{(k)}(t) \ = \ h(t) \ , \ t \ \geq \ 0 \ ,$$

$$\sum_{k=0}^{n} t^k(\alpha_k t^{-1} + \beta_k t) y^{(k)}(t) \ = \ h(t) \ , \ t \ \geq \ 0 \ ,$$

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k e^{-x} + \beta_k) y^{(k)}(x) = g(x) \ , \ -\infty < x < +\infty \ ,$$

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k e^{-x} + \beta_k e^{x}) y^{(k)}(x) = g(x) \ , \ -\infty < x < +\infty \ ,$$

где $\alpha_k \in \mathcal{R},\ \beta_k \in \mathcal{R},\ k = \overline{0,n},\ \alpha_n \neq 0,\ \beta_n \neq 0.$

Неизвестные функции $y(t)\ \ y(x)$ соответствующих однородных уравнений, ищутся в пространстве обобщённых функций $L_2\{0,1\}$.

Для указанных классов однородных уравнений выделены частные решения как по методу Черского Ю.И., так и в случае простой факторизации.

Для неоднородных уравнений построено решение и указаны условия, определяющие принадлежность решения к определенному пространству.

Метод выделения частного решения проиллюстрирован на примере решения линейного однородного дифференциального уравнения с полиномиальными коэффициентами четвёртого порядка.

В подразделе 4.2. построены решения линейного однородного дифференциального уравнения с осциллирующими коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k e^{i\gamma x} + \beta_k e^{-i\gamma x}) y^{(k)}(x) = 0 \ , \ x \in \mathcal{R} \ ,$$

где $\alpha_k,\, \beta_k \in \mathcal{C},\ k = \overline{0,n},\ \gamma \in \mathcal{R},\ \gamma > 0,$ при различных условиях, накладываемых на коэффициенты $\alpha_k, \beta_k,\ k = \overline{0,n}.$ Неизвестная функция $y(x)$ ищется из пространства обобщенных функций $L_2\{0,n\}$.

В качестве примера рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

В подразделе 4.3 дифференциальное уравнение с экспоненциальными коэффициентами вида (3.1.8) решается приближённым методом. Исходное уравнение сводится к задаче Карлемана , которая решается методом Бубнова - Галёркина для полосы.

Часть материалов подраздела 4.1. ренее были опубликованы в [62,63], а материалы подраздела 4.2. изложены в работе [33].

РАЗДЕЛ 5
ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

5.1. Смешанная задача о прогибе тонкой упругой плиты луночной формы со свободно опертым краем

5.1.1. Постановка задачи.

Рассматривается задача о нахождении прогиба $u(\alpha,\beta)$ упругой тонкой плиты луночной формы, изгибаемой поперечной нагрузкой. Один край лунки жестко закреплен, второй - свободно опертый.

Задача о прогибе сводится к решению бигармонического уравнения:

$$\Delta^2 u \;=\; \frac{q(\alpha,\beta)}{D}\,, \tag{5.1.1}$$

где $D = (E\,l^3)/(12\,(1-\nu^2))$ - циллиндрическая жесткость плиты, l - толщина плиты, E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона, $q(\alpha,\beta)$ - нагрузка.

Неоднородное бигармоническое уравнение (5.1.1) в биполярных координатах, согласно [60], записывается так:

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} - 2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right]\left(\frac{u}{h}\right) \;=\; q\,h^3 \;\;, \tag{5.1.2}$$

где $h(\alpha,\beta) \,=\, a/(ch\alpha + cos\beta)$ $-$ коэффициент Ляме, a – размерный параметр биполярных координат.

Так как край $\beta = 0$ жестко закреплён, то

$$\left.\frac{u(\alpha,\beta)}{h(\alpha,\beta)}\right|_{\beta=0} \;=\; \left.\frac{\partial\,(u/h)}{\partial\beta}\right|_{\beta=0} \;=\; 0 \;\;. \tag{5.1.3}$$

На границе $\beta = \gamma$ свободно опёртый край

$$\left.\frac{u(\alpha,\beta)}{h(\alpha,\beta)}\right|_{\beta=\gamma} \;=\; 0 \;\;, \tag{5.1.4}$$

$$\left.\left((ch\alpha + cos\beta)\,\frac{\partial^2\,(u/h)}{\partial\beta^2} \,+\, 2sin\beta\,\frac{\partial\,(u/h)}{\partial\beta} \,-\, \frac{a}{R}\,\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\right|_{\beta=\gamma} \,=\, 0 \quad , \tag{5.1.5}$$

где $R = a/|sin\gamma|$ – радиус дуги,

$$\frac{\partial u}{\partial\rho} \,=\, \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,x \,+\, (y - C_0)\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) \,. \tag{5.1.6}$$

В (5.1.6) перейдём к биполярным координатам по формулам:

$$x \,=\, \frac{ash\alpha}{ch\alpha + cos\beta} \;\;,\;\; y - C_0 \,=\, \frac{asin\alpha}{ch\alpha + cos\beta} \;\;. \tag{5.1.7}$$

Выпишем выражение производных в биполярных координатах

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha} \,=\, \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial\alpha} \,+\, \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial\alpha} \;\;,\;\; \frac{\partial u}{\partial\beta} \,=\, \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial\beta} \,+\, \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial\beta} \,. \tag{5.1.8}$$

Найдем производные от x и y по α из (4.4.7)

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha} \,=\, \frac{\partial y}{\partial\beta} \,=\, a\,\frac{1 + ch\alpha\,cos\beta}{(ch\alpha + cos\beta)^2} \;\;,\;\; \frac{\partial y}{\partial\alpha} \,=\, -\frac{\partial x}{\partial\beta} \,=\, -a\,\frac{sh\alpha\,sin\beta}{(ch\alpha + cos\beta)^2} \;. \tag{5.1.9}$$

Подставляем (5.1.9) в (5.1.8) и по правилу Крамера найдем

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x} \,=\, \frac{1 + ch\alpha\,cos\beta}{a}\,\frac{\partial u}{\partial\alpha} \,+\, \frac{sh\alpha\,sin\beta}{a}\,\frac{\partial u}{\partial\beta} \,, \\ \frac{\partial u}{\partial y} \,=\, -\frac{sh\alpha\,sin\beta}{a}\,\frac{\partial u}{\partial\alpha} \,+\, \frac{1 + ch\alpha\,cos\beta}{a}\,\frac{\partial u}{\partial\beta} \,.\end{gathered} \tag{5.1.10}$$

Далее, введя новую функцию $w(\alpha,\beta) = u(\alpha,\beta)/h(\alpha,\beta)$ с помощью правил дифференцирования, получим

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha} \,=\, h\,\frac{\partial w}{\partial\alpha} \,+\, w\,\frac{\partial h}{\partial\alpha} \;\;,\;\; \frac{\partial u}{\partial\beta} \,=\, h\,\frac{\partial w}{\partial\beta} \,+\, w\,\frac{\partial h}{\partial\beta} \,. \tag{5.1.11}$$

Нам потребуются частные производные функции $h(\alpha,\beta)$

$$\frac{\partial h}{\partial\alpha} \,=\, -a\,\frac{sh\alpha}{(ch\alpha + cos\beta)^2} \;\;,\;\; \frac{\partial h}{\partial\alpha} \,=\, a\,\frac{sin\beta}{(ch\alpha + cos\beta)^2} \,. \tag{5.1.12}$$

Учитывая формулы (5.1.7), (5.1.10) -(5.1.12), из (5.1.6) получим

$$\frac{\partial u}{\partial\rho} \,=\, \frac{a}{\rho}\left[\frac{sh\alpha cos\beta}{ch\alpha + cos\beta}\,\frac{\partial w}{\partial\alpha} \,+\, \frac{ch\alpha sin\beta}{ch\alpha + cos\beta}\,\frac{\partial w}{\partial\beta} \,+\, \frac{1 - ch\alpha cos\beta}{ch\alpha + cos\beta}\,w\right] . \tag{5.1.13}$$

Полученные представления для $\partial u/\partial\rho$, в формуле (5.1.13) подставим в (5.1.5). После преобразований граничное условие (5.1.5) примет следующий вид

$$\left[(ch\alpha + cos\beta)\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \left(2sin\beta - \frac{a^2}{R\rho}\frac{ch\alpha\, sin\beta}{ch\alpha + cos\beta}\right)\frac{\partial w}{\partial\beta} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{a^2}{R\rho}\frac{sh\alpha\, cos\beta}{ch\alpha + cos\beta}\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{a^2}{R\rho}\frac{1 - ch\alpha\, cos\beta}{ch\alpha + cos\beta} w\right]\right|_{\beta=\gamma} = 0 \ , \qquad (5.1.14)$$

причем при $\beta = \gamma$ будет $\rho = R$.

Для упрощения записи умножим выражение (5.1.14) на $(ch\alpha + cos\beta)$, тогда получим:

$$\left[(ch\alpha + cos\beta)^2\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \left(\left(2 - \frac{a^2}{R\rho}\right) sin\beta\, ch\alpha + 2\, sin\beta\, cos\beta\right)\frac{\partial w}{\partial\beta} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{a^2}{R\rho} sh\alpha\, cos\beta\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{a^2}{R\rho}(1 - ch\alpha\, cos\beta)\, w\right]\right|_{\beta=\gamma} = 0 \ . \qquad (5.1.15)$$

Применим к уравнениям (5.1.2)-(5.1.4), (5.1.15) преобразование Фурье, в результате получим

$$\frac{d^4 W(\lambda,\beta)}{d\beta^4} + 2(1-\lambda^2)\frac{d^2 W(\lambda,\beta)}{d\beta^2} + (1+\lambda^2)^2 W(\lambda,\beta) = Q(\lambda,\beta) \ , \quad (5.1.16)$$

где $Q(\lambda,\beta) = V(h^3 q(\alpha,\beta))$, $W(\lambda,\beta) = V(w(\lambda,\beta)) = V(u(\alpha,\beta)\,/\,h(\alpha,\beta))$.

$$W(\lambda, 0) = 0 \ , \quad \left.\frac{dW(\lambda,\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=0} = 0 \ , \quad W(\lambda,\gamma) = 0 \ . \qquad (5.1.17)$$

$$\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{d^2W(\lambda-2i,\beta)}{d\beta^2} + \frac{d^2W(\lambda+2i,\beta)}{d\beta^2}\right] + \right.$$

$$+ cos\beta\left[\frac{d^2W(\lambda-i,\beta)}{d\beta^2} + \frac{d^2W(\lambda+i,\beta)}{d\beta^2}\right] + \left(\frac{1}{2} + cos^2\beta\right)\frac{d^2W(\lambda,\beta)}{d\beta^2} +$$

$$+ \left(1 - \frac{a^2}{2R\rho}\right) sin\beta\left[\frac{dW(\lambda-i,\beta)}{d\beta} + \frac{dW(\lambda+i,\beta)}{d\beta}\right] + sin2\beta\frac{dW(\lambda,\beta)}{d\beta} -$$

$$- \frac{a^2}{2R\rho} cos\beta\left[(-i(\lambda-i))W(\lambda-i,\beta) - (-i(\lambda+i))W(\lambda+i,\beta)\right] +$$

$$\left.\left. + \frac{a^2}{2R\rho} cos\beta\left[W(\lambda-i,\beta) + W(\lambda+i,\beta)\right] - \frac{a^2}{R\rho}W(\lambda,\beta)\right\}\right|_{\beta=\gamma} = 0. \quad (5.1.18)$$

Таким образом, получено дифференциальное уравнение (5.1.16) с краевыми условиями (5.1.17), (5.1.18).

5.1.2. Сведение задачи (5.1.16) к задаче Карлемана.

Общий интеграл уравнения (5.1.16) может быть представлен в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и какого либо частного решения $W^{*}(\lambda,\beta)$.

$$W(\lambda,\beta) \;=\; A_1(\lambda)\;ch\,\lambda\beta\;sin\beta \;+\; A_2(\lambda)\;ch\,\lambda\beta\;cos\beta\;+$$

$$+\,A_3(\lambda)\;sh\,\lambda\beta\;sin\beta \;+\; A_4(\lambda)\;sh\,\lambda\beta\;cos\beta \;+\; W^{*}(\lambda,\beta)\quad, \tag{5.1.19}$$

где $A_1(\lambda),\, A_2(\lambda),\, A_3(\lambda),\, A_4(\lambda)$ – неизвестные пока функции, а $W^{*}(\lambda,\beta)$ – частное решение, которое в случае равномерно распределённой нагрузки записывается так:

$$W^{*}(\lambda,\beta) \;=\; \frac{a^3\,q\,\sqrt{2\pi}}{16\,D}\;\frac{sh\,\lambda\,\beta}{sh\,\lambda\pi\;sin\,\beta}\quad. \tag{5.1.20}$$

Неизвестные функции $A_1(\lambda),\; A_2(\lambda),\; A_3(\lambda)$ находим из граничных условий (5.1.17). Итак,

$$W(\lambda,0) \;=\; A_2(\lambda) \;+\; \frac{a^3\,q\,\sqrt{2\pi}}{16\,D}\;\frac{\lambda}{sh\,\lambda\pi}\quad,$$

тогда получаем

$$A_2(\lambda) \;=\; -\,\frac{a^3\,q\,\sqrt{2\pi}}{16\,D}\;\frac{\lambda}{sh\,\lambda\pi}\quad. \tag{5.1.21}$$

Далее нам потребуется частная производная функции $W(\lambda,\beta)$ по β

$$\frac{\partial W(\lambda,\beta)}{\partial\beta} \;=\; A_1(\lambda)\;(\,\lambda\,sh\,\lambda\beta\;sin\beta \;+\; ch\,\lambda\beta\;cos\beta\,)\,+$$

$$+\,A_2(\lambda)\;(\,\lambda\,sh\,\lambda\beta\;cos\beta \,-\, ch\,\lambda\beta\;sin\beta\,) \,+\, A_3(\lambda)\;(\,\lambda\,ch\,\lambda\beta\;sin\beta + sh\,\lambda\beta\;cos\beta\,)\,+$$

$$+\,A_4(\lambda)(\lambda\,ch\,\lambda\beta\,cos\beta \,-\, sh\,\lambda\beta\;sin\beta\,) \,+\, \frac{a^3q\sqrt{2\pi}}{16D}\;\frac{\lambda\,ch\,\lambda\beta\;sin\beta \,-\, sh\,\lambda\beta\,cos\beta}{sh\,\lambda\pi\;sin^2\beta}.$$

Итак, из условия

$$\left.\frac{\partial W(\lambda,\beta)}{\partial\beta}\right|_{\beta=0} \;=\; 0\;,$$

получаем

$$A_1(\lambda) \;=\; -\lambda\, A_4(\lambda) \quad . \qquad (5.1.22)$$

Для получения соотношения (5.1.22) потребовалось нахождение следующего предела

$$\lim_{\beta\to 0}\, \frac{\lambda\, ch\,\lambda\beta\; sin\beta \,-\, sh\,\lambda\beta\; cos\beta}{sh\,\lambda\pi\; sin^2\beta} \;=\; 0 \quad .$$

Наконец, удовлетворяя последнему условию (5.1.17) $\quad (W(\lambda,\gamma)\;=\;0)\quad$ и используя определенные выражения (5.1.21), (5.1.22), получим

$$A_3(\lambda) \;=\; -\,\frac{a^3\, q\,\sqrt{2\pi}}{16\,D}\;\frac{1}{sh\,\lambda\pi}\;\frac{\lambda\, ch\,\lambda\gamma\; cos\gamma}{sh\,\lambda\gamma\; sin\,\gamma} +$$

$$+\,A_4(\lambda)\frac{\lambda ch\lambda\gamma\, sin\gamma \,-\, sh\lambda\gamma\, cos\gamma}{sh\lambda\gamma\, sin\,\gamma} \;-\; \frac{a^3 q\sqrt{2\pi}}{16D}\,\frac{sh\lambda\gamma}{sh\lambda\pi}\,\frac{1}{sh\lambda\gamma\, sin^2\gamma}. \qquad (5.1.23)$$

Вводим новую неизвестную функцию $\quad \Phi(\lambda)\;=\;A_4(\lambda)\,.\quad$ Теперь, учитывая формулы (5.1.21) - (5.1.23), из (5.1.19) получаем

$$W(\lambda,\beta) \;=\; \Phi(\lambda)\;\{\, sh\,\lambda\beta\, cos\,\beta \,-\, \lambda\, ch\,\lambda\beta\, sin\,\beta +$$

$$+\,sh\,\lambda\beta\, sin\,\beta\;\frac{\lambda\, ch\,\lambda\gamma\; sin\gamma \,-\, sh\,\lambda\gamma\; cos\gamma}{sh\,\lambda\gamma\; sin\,\gamma}\,\Big\} \;+\; W^*(\lambda,\beta) \,-$$

$$-\,\frac{a^3\, q\,\sqrt{2\pi}}{16\,D}\;\frac{\lambda}{sh\,\lambda\pi}\; ch\,\lambda\beta\; cos\beta \;+\; \frac{a^3\, q\,\sqrt{2\pi}}{16\,D}\;\frac{1}{sh\,\lambda\pi}\;\frac{\lambda\, ch\,\lambda\gamma\; cos\gamma}{sh\,\lambda\gamma\; sin\,\gamma}\; sh\,\lambda\beta\; sin\beta \,-$$

$$-\;\frac{W^*(\lambda,\gamma)}{sh\,\lambda\gamma\; sin\,\gamma}\; sh\,\lambda\beta\; sin\beta \quad . \qquad (5.1.24)$$

Для определения неизвестной функции $\quad \Phi(\lambda)\quad$ используем граничное условие (5.1.18), которое с учетом условия $\quad W(\lambda,\gamma)\;=\;0\quad$ примет вид:

$$\Bigg\{\frac{1}{4}\left[\frac{d^2W(\lambda-2i,\beta)}{d\beta^2} + \frac{d^2W(\lambda+2i,\beta)}{d\beta^2}\right] +$$

$$+\,cos\beta\left[\frac{d^2W(\lambda-i,\beta)}{d\beta^2} + \frac{d^2W(\lambda+i,\beta)}{d\beta^2}\right] + \left(\frac{1}{2}+cos^2\beta\right)\frac{d^2W(\lambda,\beta)}{d\beta^2} +$$

$$+\,\left(1-\frac{a^2}{2R\rho}\right) sin\beta\left[\frac{dW(\lambda-i,\beta)}{d\beta} + \frac{dW(\lambda+i,\beta)}{d\beta}\right] +$$

$$+\,sin2\beta\frac{dW(\lambda,\beta)}{d\beta} - \Bigg\}\Bigg|_{\beta=\gamma} \;=\; 0 \quad . \qquad (5.1.25)$$

Для подстановки (5.1.24) в (5.1.25) потребуются значения первой и второй производной функции $W(\lambda, \beta)$ по β причем, для того чтобы избежать громоздких формул выпишем в отдельности значение частных производных при подстановке $\beta = \gamma$. Начнем с первой производной

$$\left.\frac{\partial W(\lambda,\beta)}{\partial \beta}\right|_{\beta=\gamma} = \Phi(\lambda)\, B(\lambda) + H_2(\lambda) \quad , \tag{5.1.26}$$

где

$$B(\lambda) = \frac{\lambda^2 \, sin^2 \gamma \, - \, sh^2 \lambda \gamma}{sh\, \lambda\gamma \, sin\, \gamma} \quad , \tag{5.1.27}$$

$$H_2(\lambda) = \frac{a^3\, q\, \sqrt{2\pi}}{16\, D} \, \frac{1}{sh\, \lambda\pi} \left\{ \lambda\, ch\, \lambda\, \gamma \, \frac{1 + sin^2 \gamma}{sin\, \gamma} - \right.$$

$$- (\, \lambda^2 \, sin^2 \gamma \, + \, 1\,) \, \frac{cos\, \gamma}{sin^2 \gamma} \, sh\, \lambda\gamma \, + \, (\, \lambda^2 \, - \, 1\,)\, \lambda\, ch\, \lambda\, \gamma\, cos\, \gamma -$$

$$\left. - (\, \lambda^2 \, - \, 1\,) \, \frac{sh\, \lambda\gamma}{sin\, \gamma} \, + \, 2\, \lambda^2 \, \frac{ch^2\, \lambda\gamma\, cos^2 \gamma}{sh\, \lambda\gamma\, sin\, \gamma} \, - \, 2\, \lambda \, \frac{ch\, \lambda\gamma\, cos\, \gamma}{sin^2 \gamma} \right\} . \tag{5.1.28}$$

Далее, для второй производной

$$\left.\frac{\partial^2 W(\lambda,\beta)}{\partial \beta^2}\right|_{\beta=\gamma} = \Phi(\lambda)\, A(\lambda) + H_1(\lambda) \quad , \tag{5.1.29}$$

где

$$A(\lambda) = 2\, \lambda \, \frac{\lambda\, sin\, \gamma\, cos\, \gamma \, - \, sh\, \lambda\, \gamma\, ch\, \lambda\, \gamma}{sh\, \lambda\gamma\, sin\, \gamma} \quad , \tag{5.1.30}$$

$$H_1(\lambda) = \frac{a^3\, q\, \sqrt{2\pi}}{16\, D} \, \frac{1}{sh\, \lambda\pi} \left\{ 2\, \frac{sh\, \lambda\gamma}{sin\, \gamma} \, - \, 3\, \lambda\, ch\, \lambda\gamma \, \frac{cos\, \gamma}{sin^2 \gamma} \, + \, 2\, \frac{cos^2 \gamma}{sin^3 \gamma} \, sh\, \lambda\gamma + \right.$$

$$\left. + 2\, \lambda^2 \, sh\, \lambda\, \gamma\, sin\, \gamma \, + \, 2\, \lambda \, \frac{ch^2\, \lambda\gamma\, cos^2 \gamma}{sh\, \lambda\gamma\, sin\, \gamma} \right\} \quad . \tag{5.1.31}$$

Ещё потребуются первая и вторая производные от частного решения

$$\frac{dW^*(\lambda,\gamma)}{d\, \beta} = \frac{a^3\, q\, \sqrt{2\pi}}{16\, D} \, \frac{\lambda\, ch\, \lambda\beta\, sin\beta \, - \, sh\, \lambda\beta\, cos\beta}{sh\, \lambda\pi\, sin^2 \beta} \quad ,$$

$$\frac{d^2W^*(\lambda,\gamma)}{d\, \beta^2} = \frac{a^3\, q\, \sqrt{2\pi}}{16\, D} \left(\frac{(\, \lambda^2 \, + \, 1\,) sh\, \lambda\beta\, sin^2\beta \, - \, \lambda\, ch\, \lambda\beta\, sin\, 2\beta}{sh\, \lambda\pi\, sin^3 \beta} + \right.$$

$$\left. + \, \frac{2\, sh\, \lambda\beta\, cos^2 \beta}{sh\, \lambda\pi\, sin^3 \beta} \right) \quad .$$

Итак, подставляем (5.1.24) в (5.1.25) и, с учетом (5.1.26) – (5.1.31), после элементарных преобразований получаем пятиэлементную ЗК для полосы

$$D_2\,(\lambda-2i)\,\Phi\,(\lambda-2i)\;+\;D_1\,(\lambda-i)\,\Phi\,(\lambda-i)\;+\;D_0\,(\lambda)\,\Phi\,(\lambda)\,+$$

$$+\,D_1\,(\lambda+i)\,\Phi\,(\lambda+i)\;+\;D_2\,(\lambda+2i)\,\Phi\,(\lambda+2i)\;=\;H\,(\lambda)\quad, \tag{5.1.32}$$

где

$$D_0\,(\lambda)\;=\;(\,\frac{1}{2}\,+\,cos^2\,\gamma\,)\,A\,(z)\;+\;sin\,2\gamma\,B\,(z)\quad,$$

$$D_1\,(\lambda)\;=\;cos\,\gamma\,A\,(z)\;+\;(\,1\;-\;\frac{a^2}{2\,R\,\rho}\,)\,sin\,\gamma\,B\,(z)\quad,\quad D_2\,(\lambda)\;=\;\frac{1}{4}\,A\,(z)\;,$$

$$H\,(\lambda)\;=\;-\,\left\{\frac{1}{4}\,[\,H_1\,(\lambda-2i)\;+\;H_1\,(\lambda+2i)\,]\;+\;cos\gamma\,[\,H_1\,(\lambda-i)\,+\right.$$

$$+\,H_1\,(\lambda+i)\,]\;+\;\left(1-\frac{a^2}{2R\rho}\right)\,sin\gamma\,[\,H_2\,(\lambda-i)\;+\;H_2\,(\lambda+i)\,]\;+$$

$$\left.+\;\left(\frac{1}{2}+cos^2\gamma\right)\,H_1\,(\lambda)\;+\;sin2\gamma\,H_2\,(\lambda)\right\}\quad.$$

Функция $A(z)$ определяется из (5.1.30), $B(z)$ из (5.1.27), $H_1\,(z)$ из (5.1.31) $H_2\,(z)$ из (5.1.28). Легко покозать, что

$$D_2\,(\lambda+2i)\;=\;\overline{D_2\,(\lambda-2i)}\;,\;D_1\,(\lambda+i)\;=\;\overline{D_1\,(\lambda-i)}\;,\;Re\,H\,(\lambda)\;=\;H\,(\lambda)\;.$$

Функции $D_0(z), D_1(z), D_2(z)$ ведут себя как $e^{\lambda\gamma}$, $H(z)-\;e^{-(\pi-\gamma)\lambda}$.

5.1.3. Исследование ЗК на нормальную разрешимость.

Введём новую неизвестную функцию

$$\Psi\,(\lambda)\;=\;D_2\,(\lambda)\,\Phi\,(\lambda)\quad, \tag{5.1.33}$$

тогда задача Карлемана (5.1.32) примет вид

$$\Psi\,(\lambda+2i)\;+\;B_1\,(\lambda+i)\,\Psi\,(\lambda+i)\;+\;B_2\,(\lambda)\,\Psi\,(\lambda)\,+$$

$$+\,B_3\,(\lambda-i)\,\Psi\,(\lambda-i)\;+\;\Psi\,(\lambda-2i)\;=\;H\,(\lambda)\quad, \tag{5.1.34}$$

где

$$B_1\,(\lambda+i)\;=\;\frac{D_1\,(\lambda+i)}{D_2\,(\lambda+i)}\quad,\quad B_2\,(\lambda)\;=\;\frac{D_0\,(\lambda)}{D_2\,(\lambda)}\quad,\quad B_3\,(\lambda-i)\;=\;\frac{D_1\,(\lambda-i)}{D_2\,(\lambda-i)}\quad.$$

Граничные условия, согласно [22], записываются так:

$$\Psi\,(\lambda+2i)\;=\;\frac{1}{2}Y\,(\lambda)\mp\frac{i}{8}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{Y\,(t)}{sh\,(\,(t-\lambda)\,\pi\,/4)}\,dt\quad. \tag{5.1.35}$$

$$\Psi(\lambda+i)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{ch(\pi(t-\lambda)/4)\;\pm\;i\,sh(\pi(t-\lambda)/4)}{ch\,(\,(t-\lambda)\,\pi\,/2)}Y\,(t)\,dt. \tag{5.1.36}$$

$$\Psi\,(\lambda)\;=\;\frac{1}{8}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{Y\,(t)}{ch\,(\,(t-\lambda)\,\pi\,/4)}\,dt\quad. \tag{5.1.37}$$

Причем $\quad\Psi\,(\lambda+2i)\;+\;\Psi\,(\lambda-2i)\;=\;Y\,(\lambda)\quad$ и $\quad Y\,(\lambda)\,\in L_2\,(R)$.

Учитывая граничные условия (5.1.35) – (5.1.37), из (5.1.34) получаем

$$Y\,(\lambda)\;+\;B_1\,(\lambda+i)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_1\,(\lambda-t)\,Y\,(t)\,dt\;+\;B_3\,(\lambda-i)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_2\,(\lambda-t)\,Y\,(t)\,dt\;+$$

$$+\;B_2\,(\lambda)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_0\,(\lambda-t)\,Y\,(t)\,dt\;=\;H\,(\lambda)\quad, \tag{5.1.38}$$

где

$$K_0\,(\lambda)\;=\;\frac{1}{8\,ch\,(\,\lambda\,\pi/4)}\quad,$$

$$K_1\,(\lambda)\;=\;\frac{1}{4\sqrt{2}}\,\frac{ch((\pi\,\lambda)/4)\;-\;i\,sh((\pi\,\lambda)/4)}{ch\,(\lambda\,\pi/2)}\quad,$$

$$K_2\,(\lambda)\;=\;\frac{1}{4\sqrt{2}}\,\frac{ch((\pi\,\lambda)/4)\;+\;i\,sh((\pi\,\lambda)/4)}{ch\,(\lambda\,\pi/2)}\quad.$$

Согласно [49], символ находится по формуле

$$\sigma\,(\pm\infty,\lambda)=1+B_1\,(\pm\infty)\,\mathcal{K}_1\,(\lambda)+B_3\,(\pm\infty)\,\mathcal{K}_2\,(\lambda)+B_2\,(\pm\infty)\,\mathcal{K}_0\,(\lambda), \tag{5.1.39}$$

где $\quad\mathcal{K}_j\,(\lambda)\;=\;V\,(K_j(\lambda))\;,\;j=0,1,2.$

Выпишем функции $\quad B_1\,(\lambda+i),\;B_2\,(\lambda),\;B_3\,(\lambda-i).$

$$B_1\,(\lambda+i)=4\,cos\,\gamma\;+\;4\,\left(1-\frac{a^2}{2\,R^2}\right)\,\frac{(\lambda+i)^2\,sin^2\,\gamma\;-\;sh^2\,(\lambda+i)\,\gamma}{(\lambda+i)((\lambda+i)\,sin\,2\gamma\;-\;sh\,2(\lambda+i)\,\gamma\,)},$$

$$B_3\,(\lambda-i)=4\,cos\,\gamma\;+\;4\,\left(1-\frac{a^2}{2\,R^2}\right)\,\frac{(\lambda-i)^2\,sin^2\,\gamma\;-\;sh^2\,(\lambda-i)\,\gamma}{(\lambda-i)((\lambda-i)\,sin\,2\gamma\;-\;sh\,2(\lambda-i)\,\gamma\,)},$$

$$B_2\,(\lambda) = 4\,\left(\frac{1}{2}\,+\,cos^2\,\gamma\right)\,+\,4\,sin\,2\gamma\,\frac{\lambda^2\,sin^2\,\gamma\,-\,sh^2\,\lambda\,\gamma}{\lambda\,(\,\lambda\,sin\,2\gamma\,-\,sh\,2\lambda\gamma\,)}.$$

Теперь находим пределы функций $B_1\,(\lambda+i),\ B_2\,(\lambda),\ B_3\,(\lambda-i)$ на бесконечности

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} B_1\,(\lambda+i)\,=\,\lim_{\lambda\to\pm\infty} B_3\,(\lambda-i)\,=\,4cos\,\gamma\;,\;\lim_{\lambda\to\pm\infty} B_2\,(\lambda)\,=\,2\,+\,4\,cos^2\,\gamma.$$

Таким образом, получаем

$$B_1\,(\pm\infty)\,=\,B_3\,(\pm\infty)\,=\,4\,cos\,\gamma\;\;,\;\;B_2\,(\pm\infty)\,=\,2\,+\,4\,cos^2\,\gamma. \qquad (5.1.40)$$

Далее для вычисления интегралов Фурье нам потребуются следующие преобразования

$$V\,\left(\frac{1}{ch\,(t\,\pi/4)}\right)\,=\,\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{ch\,2\lambda}\;\;,$$

$$V\,\left(\frac{ch\,(t\,\pi/4)}{ch\,(t\,\pi/2)}\right)\,=\,\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{ch\,\lambda}{2\,ch^2\,\lambda\,-\,1}\;\;.$$

Итак, используя предельные значения (5.1.40) и изображения ядерных функций уравнения (5.1.38), из формулы (5.1.39) получаем значение символа

$$\sigma(\pm\infty,\lambda) = 1 + 4cos\gamma\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\frac{ch\lambda}{2ch^2\lambda-1} + (1+2cos^2\gamma)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ch2\lambda}. \qquad (5.1.41)$$

Ясно, что $\sigma\,(\pm\infty,\lambda)\,\neq\,0$ и

$$\chi\,=\,\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}arg\,\frac{\sigma\,(-\infty,\lambda)}{\sigma\,(+\infty,\lambda)}\bigg|_{-\infty}^{+\infty}\,=\,0\;\;, \qquad (5.1.42)$$

где χ – индекс интегрального уравнения (5.1.38).

Ведем оператор L следующим образом:

$$L\,\Psi\,\equiv\,\Psi\,(\lambda+2i)\,+\,B_1\,(\lambda+i)\,\Psi\,(\lambda+i)\,+\,B_2\,(\lambda)\,\Psi\,(\lambda)\,+$$

$$+\,B_3\,(\lambda-i)\,\Psi\,(\lambda-i)\,+\,\Psi\,(\lambda-2i)\;\;. \qquad (5.1.43)$$

Так как индекс $\chi\,=\,0,$ то опрератор L – фредгольмов. Следовательно, задача (5.1.34) имеет решение. Согласно замечанию к теореме (о единственности) работы [45,стр.74] предполагается, что существующее решение поставленной задачи и, тем самым, решение задачи Карлемана (5.1.34) единственно.

Таким образом, задача (5.1.34) является нётеровой, безусловно разрешимой и имеет единственное решение. Тогда существует ограниченный обратный опрератор: $L^{-1} : L_2 \mapsto L_2$.

5.1.4. Построение решения.

Согласно подразделу 2.4, приближённое решение задачи (5.1.34) будем искать в виде

$$\Psi_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} [\, \alpha_k^+ \varphi_k^+(\lambda) + \alpha_k^- \varphi_k^-(\lambda)], \tag{5.1.44}$$

где $\alpha_k^\pm, \; k = \overline{1,n}$ - неизвестные коэффициенты, подлежащие определению,

$$\varphi_k^\pm(\lambda) = \frac{1}{\lambda \pm i(k+3)} \;, \; k \in \mathcal{N} \;. \tag{5.1.45}$$

Известные функции задачи (5.1.34) $B_1(\lambda), \; B_2(\lambda), \; B_3(\lambda)$ непрерывны на всей сомкнутой оси OX, а заданная функция $H(\lambda) \in L_2(R)$.

Неизвестные коэффициенты $\alpha_k^\pm$ определяем из системы (5.1.21), построенной по методу Бубнова - Галеркина. В нашем случае будем иметь

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} (\, \alpha_k^+ a_{kj}^+ + \alpha_k^- b_{kj}^+ \,) = r_j^+ \\ \sum\limits_{k=1}^{n} (\, \alpha_k^+ a_{kj}^- + \alpha_k^- b_{kj}^- \,) = r_j^- \\ \qquad j = \overline{1,n} \,, \end{cases} \tag{5.1.46}$$

$$a_{kj}^\pm = (\, \varphi_{k+2}^+ + B_1 \varphi_{k+1}^+ + B_2 \varphi_k^+ + B_3 \varphi_{k-1}^+ + \varphi_{k-2}^+ \,, \, \varphi_j^\pm \,) \;,$$

где

$$b_{kj}^\pm = (\, \varphi_{k-2}^- + B_1 \varphi_{k-1}^- + B_2 \varphi_k^- + B_3 \varphi_{k+1}^- + \varphi_{k+2}^- \,, \, \varphi_j^\pm \,) \;,$$

$$r_j^\pm = (\, H \,, \, \varphi_j^\pm \,) \;, \quad k = \overline{1,n} \;, \quad j = \overline{1,n} \;. \tag{5.1.47}$$

После нахождения коэффициентов $\alpha_k^\pm$, а, тем самым, и решения задачи Карлемана (5.1.34) в виде (5.1.44) перейдём к функции $\Phi(\lambda)$ по формуле (5.1.33).

С учетом свойств функций $D_0(z), \; D_1(z), \; D_2(z)$, окончательно получим

$$\Phi(\lambda) = \frac{4\, sh\, \lambda\gamma \, sin\, \gamma}{\lambda\, (\, \lambda\, sin\, 2\,\gamma \, - \, sh\, 2\,\lambda\,\gamma\,)} \sum_{k=1}^{n} \frac{2\,(\, k \, + \, 3\,)\, \alpha_k}{\lambda^2 \, + \, (\, k \, + \, 3\,)^2} \;. \tag{5.1.48}$$

Здесь коэффициенты α_k определяются из $\alpha_k = Im\,\alpha_k^+ = -Im\,\alpha_k^-$, где $\alpha_k^{\pm}$ - решение системы (5.1.46), причем $R(\lambda)$ – функция чётная.

Таким образом, по граничным условиям (5.1.17),(5.1.18) найдена последняя неизвестная функция и определено решение дифференциального уравнения (5.1.16), которое дается формулой (5.1.24).

Функция прогиба определяется с помощью обратного преобразования Фурье по формуле

$$u(\alpha, \beta) = h(\alpha,\beta)\, V^{-1}(W(\lambda,\beta)) \quad . \tag{5.1.49}$$

В работе [31] выведены функция прогиба и изгибающий момент, а также проведен численный эксперимент.

Выводы

В подразделе 5.1. рассматривается задача о нахождении прогиба $u(\alpha, \beta)$ упругой тонкой плиты луночной формы, изгибаемой поперечной нагрузкой. Один край лунки жестко закреплен, второй - свободно опертый.

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} - 2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right]\left(\frac{u}{h}\right) = q\,h^3 \quad .$$

С граничными условиями

$$\left.\frac{u(\alpha,\beta)}{h(\alpha,\beta)}\right|_{\beta=0} = \left.\frac{\partial\,(u/h)}{\partial\beta}\right|_{\beta=0} = 0 \;\; , \;\; \left.\frac{u(\alpha,\beta)}{h(\alpha,\beta)}\right|_{\beta=\gamma} = 0 \quad ,$$

$$\left.\left((ch\alpha + cos\beta)\,\frac{\partial^2\,(u/h)}{\partial\beta^2} + 2sin\beta\,\frac{\partial\,(u/h)}{\partial\beta} - \frac{a}{R}\,\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\right|_{\beta=\gamma} = 0 \quad ,$$

где $R = a/|sin\gamma|$ – радиус дуги,

$$\frac{\partial u}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}x + (y - C_0)\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad .$$

Поставленная задача сводится к пятиэлементной ЗК для полосы

$$\Psi(\lambda + 2i) + B_1(\lambda + i)\,\Psi(\lambda + i) + B_2(\lambda)\,\Psi(\lambda) +$$

$$+ B_3(\lambda - i)\,\Psi(\lambda - i) + \Psi(\lambda - 2i) = H(\lambda) \quad ,$$

для которой показано, что она является нетеровой, безусловно разрешимой и имеет единственное решение.

Приближённое решение ищется в виде

$$\Psi_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} [\, \alpha_k^+ \varphi_k^+(\lambda) + \alpha_k^- \varphi_k^-(\lambda) \,] \quad ,$$

где $\alpha_k^{\pm}$, $k = \overline{1, n}$ – неизвестные коэффициенты определяются из системы, построенной по методу Бубнова - Галеркина.

Материалы подраздела 5.1. полностью изложеныв работе [31] и в [32].

ВЫВОДЫ

В диссертации приведены теоретические обобщения и новые решения научной проблемы, связанной с решением дифференциальных уравнений. Получены решения дифференциальных уравнений из некоторых классов и расширена теория задачи Карлемана. Результаты имеют как теоретическое, так и практическое значение, состоящее в построении конструктивного решения конкретных задач математической физики. Итак:

1) впервые доказано существование и единственность решения задачи Карлемана в кольце;

2) впервые получено точное решение задачи Карлемана в кольце для двух пар функций в частном случае;

3) обоснован аналитический метод приближённого решения многоэлементной ЗК для полосы и в кольце;

4) построены частные решения линейных однородных дифференциальных уравнений n-го порядка с полиномиальными и с экспоненциальными коэффициентами. В общем случае предложен аналитический метод приближённого решения линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными и с экспоненциальными коэффициентами;

5) реализован новый подход аналитического решения линейного однородного дифференциального уравнения с осциллирующим коэффициентами;

6) предложен с обоснованием алгоритм построения приближённого решения одной задачи теории упругости, которая известными методами не подовалась решению;

7) описан класс бесконечных систем плавного перехода, которые сводятся к задаче Карлемана в кольце. В частных случаях получены точные решения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям: Пер. с анг. - М.: Наука, 1979. - 832 с.

[2] Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. - М.: Наука, 1977. - 640 с.

[3] Банцури Р.Д. Контактная задача для клина с упругим креплением // Доклады АН СССР. - 1973. - Т. 211, N4. - С. 797-800.

[4] Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.: Наука, 1973. - 632 с.

[5] Бегун А.П. О числе периодических решений порождаемых особым периодическим решением // Дифференц. уравнения. - 1999. - Т. 35, N8. - С. 1132-1134.

[6] Беркович Ф.Д. Об одной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с комплексно сопряжёнными неизвестными // Изв. вузов. Математика. - 1966. - N3. - С. 12-23.

[7] Ван Даньчжи О построении общего решения бигармонического уравнения Хилла и уравнения Матье // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М. - 1985, С. 3-22.

[8] Василевский Н.Л., Карелин А.А., Керекеша П.В., Литвинчук Г.С. Об одном классе сингурярных интегральных уравнений с инволюцией и его применениях в теории задач для дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. - 1977. - Т. 13, N9. - С. 1692-1700.

[9] Воднев В.Т. Основные математические формулы. -Минск: Вышэйшая школа, 1988. - 270 с.

[10] Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. - Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. - 288 с.

[11] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.

[12] Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. - М.: Наука, 1978. - 296 с.

[13] Грибняк Л.Н., Тихоненко Н.Я. К приближённому решению трёхэлементной задачи Карлемана для полосы с аналитическим сдвигом во внутрь области // Изв. вузов. Математика. - 1985. - N8. - С. 71-74.

[14] Грибняк Л.Н., Тихоненко Н.Я. Точное решение трёхэлементной задачи Карлемана для полосы с комплексно сопряжёнными коэффициентами // Одес. гос. ун-т.- Одесса, 1987. - 16 с. - Рус. - Деп в Укр НИИНТИ 23.06.87, N1716 - Ук 87.

[15] Данилович А.А., Лаптинский В.Н. Об одном представлении периодического решения линейного матричного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. - 2000. - Т. 36, N2. - С. 276-278.

[16] Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций. - Ленинград.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1977. - 184 с.

[17] Дащенко А.Ф., Керекеша П.В., Попов Г.Я. Об одном способе решения задач кручения подкреплённых стержней // Прикл. механика. - 1977. - Т. 13, N6. - С. 102-111.

[18] Евграфов М.А. Аналитические функции. - М.: Наука, 1968. - 472 с.

[19] Зверович Э.И., Крушевский Е.А., Митюшев В.В. Краевая задача Карлемана для кольца и её приложение // Вестник Белорусского ун-та, Сер.1, физ.-мат. и мех.. - 1986. - N1. - С. 4.

[20] Иванов В.В. Теория приближённых методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. - Киев: Наукова думка, 1968. - 288 с.

[21] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Пер. с нем. - М.: Наука, 1971. - 576 с.

[22] Карелін О.А., Керекеша П.В. До теоріі задачі Карлемана для смуги з аналітичним зсувом в область // Доповіді АН УРСР. Сер. А. - 1975. - N12. - С. 1070-1073.

[23] Квеселава Д.А. Некоторые граничные задачи теории функций // Труды Тбилисского математ. ин-та АН Груз. ССР. - 1948. - Т. 16, С. 39-80.

[24] Керекеша П.В. Интегральное представление периодической аналитической функции в полосе // Тезисы докладов третьей респуб. научно - метод. конф., посв. 200-летию со дня рожд. Н.И.Лобачевского. - Одесса: ОГУ.- 1992. - С. 38-39.

[25] Керекеша П.В. Общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с полиномиальными коэффициентами специального вида // Тезисы докладов третьего респуб. симпозиума по дифференциальным и интегральным уравнениям. - Одесса: ОГУ. - 1982. - С. 24-25.

[26] Керекеша П.В. Симметричная задача Карлемана для полосы с параллельным сдвигом на вещественную ось // Доповіді НАН Украіни. - 1998. - N11. - С. 29-33.

[27] Керекеша П.В., Отилио М.А. Об одном классе линейных дифференциальных уравнений конечного и бесконечного порядка со специальными переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. - 1982. - Т. 18, N10. - С. 54-60.

[28] Керекеша П.В., Отилио М.А. Об исследовании задачи Карлемана для полосы с аналитическим сдвигом во внутрь // Одес. гос. ун-т.- Одесса, 1979. - 34с. - Рус. - Деп. в ВИНИТИ 18.11.79, N 2543 - 79 Деп.

[29] Керекеша П.В., Отилио М.А. Задачи математической физики, сводящиеся к задаче Карлемана для полосы с аналитическим сдвигом во внутрь области // Одес. гос. ун-т. - Одесса, 1980. - 20 с. - Рус.- Деп. в ВИНИТИ 13.10.80, N5184 - 80 Деп.

[30] Керекеша П.В., Хачатуров С.Ю. Задача Карлемана в кольце для двух пар функций // Укр. мат. журн. - 1997. - Т. 49, N5. - С. 662-671.

[31] Керекеша П.В., Хачатуров С.Ю. Смешанная задача о прогибе тонкой упругой плиты луночной формы // Прикл. механика. - 1998. - Т. 34, N1. - С. 85-91.

[32] Керекеша П.В., Хачатуров С.Ю. Приближенное решение пятиэлементной задачи Карлемана для полосы с аналитическим сдвигом во внутрь области с приложением // Тезисы докладов междунар. конф. "Алгебра и анализ". - Том 2. - Казань: КГУ. - 1994. - С. 70.

[33] Керекеша Д.П., Хачатуров С.Ю. Об одном линейном однородном дифференциальном уравнении с осциллирующими коэффициентами // Одес. гос. ун-т. - Одесса, 1997. - 19 с. - Рус. - Деп. в ГНТБ Украины 23.12.97, N535 - Ук97

[34] Керекеша П.В., Черский Ю.И. Интегральное представление аналитической функции в кольце и его приложение // Укр. мат. журн. - 1995. - Т. 47, N3. - С. 78-83.

[35] Козловский В.А. Применение краевой задачи Карлемана к исследованию распространения волн в среде с плавным переходом // Укр. мат. журн. -

1986. - Т. 38, N5. - С. 792-795.

[36] Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближений. - М.: Наука, 1976. - 320 с.

[37] Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближений. - М.: Наука, 1987. - 424 с.

[38] Кравченко В.Г. О разрешимости линейных функциональных уравнений // Изд-во АН УССР, мат. физика. - 1973. - N14. - С. 75-78.

[39] Краснов М.Л. Интегральные уравнения. - М.: Наука, 1975. - 304 с.

[40] Лебедев Н.Н., Скальская И.П. Новый метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на клине конечной проводимости // Журн. техн. физ. - 1962. - Т. 32, N10. - С. 1174.

[41] Лебедев Н.Н., Скальская И.П. Некоторые задачи теории теплопроводности для клиновидных тел // Журн. техн. физ. - 1964. - Т. 34, N9. - С. 1556.

[42] Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. - М.:Наука, 1977. - 448 с.

[43] Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. - М.: Наука, 1967. - 486 с.

[44] Медерос О.Б. Задачи математической физики, сводящиеся к краевой задаче Карлемана для полосы: Автореф.дис... канд. физ.- мат. наук: 01.01.02 / Одес. Гос. ут-т. - Одесса, 1983. - 16 с.

[45] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. - 707 с.

[46] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: Наука, 1974. - 342 с.

[47] Нуллер Б.М. Деформация упругого клина, подкреплённого балкой // Прикладная математика и механика. - 1974. - Т. 38, N5. - С. 876-882.

[48] Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином // Прикл. математика и механика. - 1974. - Т. 38, N2. - С. 312-320.

[49] Раковщик Л.С. К теории уравнений типа свертки // Успехи математических наук. - 1963. - Т. 18, N4. - С. 171-177.

[50] Рапопорт И.М. О некоторых "парных" интегральных и интегро - дифференциальных уравнениях // Сб. тр. ин-та матем. АН УССР. - 1949. - N12. - С. 102-118.

[51] Рогожин В.С. Один класс бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Доклады АН СССР. - 1957. - Т. 114, N3. - С. 486-489.

[52] Рогожин В.С. К теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Уч. зап. Ростовск. ун-та., Тр. физ.-матем. фак. - 1959. - Т. 43, N6. - С. 73-82.

[53] Сайго Метуми, Килбас А.А. Решение одного класса линейных дифференциальных уравнений в терминах функций типа Миттаг-Лефлера // Дифференц. уравнения. - 2000. - Т. 36, N2. - С. 168-176.

[54] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. - Киев: Наукова думка, 1976. - 320 с.

[55] Соболь Г.П., Соболь И.М. Гипергеометричекие функции и обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с экспоненциальными коэффициен-

тами // Дифференц. уравнения. - 1979. - Т. 15, N7. - С. 1212-1215.

[56] Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. - М-Л.: Гостехиздат, 1948. - 396 с.

[57] Тихоненко Л.Я. Плоская смешенная задача теплопроводности для клина // Дифференц. уравнения. - 1973. - Т. 9, N10. - С. 1915-1918.

[58] Тихоненко Н.Я. О рядах Фурье по системам рациональных функций на вещественной оси и некоторые приложения // Вісник Киівського університету. Серія фіз. - мат. наук. - 1998. - Вып.2 - С. 127-137.

[59] Треногин В.А. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1980. - 496 с.

[60] Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. - М. - Л., 1963. - 367 с.

[61] Хачатуров С.Ю. О существовании решения задачи Карлемана для кольца // "Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики и их приложения". Сб. научных трудов Института математики НАН Украины. Киев, 1997. - С. 214-217.

[62] Хачатуров С.Ю. О решении линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка с полиномиальными коэффициентами // Тези доповідей Міждунар. конф. "Диференціальні та інтегральні рівняння". - Одесса: ОГУ. - 2000. - С. 284.

[63] Хачатуров С.Ю. О решении линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка с экспоненциальными коэффициентами // Тезисы докладов "Понтрягинские чтения - XI". - Воронеж: ВГУ. - 2000. - С. 149.

[64] Черский Ю.И. Краевые задачи со специальным сдвигом, разрешимые в квадратурах // Тезисы докладов Второй респуб. конф. математиков. -

Минск: МнГУ. - 1967. - С. 57-59.

[65] Черский Ю.И. Граничные задачи и интегральные уравнения, решаемые методом факторизации // Тр. симп. по мех. сплошн. среды и родственным пробл. анализа. - Т.2. - Тбилиси. - 1974. - С. 281-291.

[66] Черский Ю.И. Нормально разрешимое уравнение плавного перехода // Доклады АН СССР. - 1970. - Т. 190, N1. - С. 57-60.

[67] Шилов Г.Е. Математический анализ. - М.: Наука, 1965. - 327 с.

[68] Яремчук Ф.П., Рудченко П.А. Алгебра и элементарные функции. - Киев.: Наукова думка, 1987. - 648 с.

[69] Hansen J. Stability diagramas for coupled Mathieu - equations // Ing. - Ard. 1985, V.55, N6, T. 463-473.

[70] Karleman T. Sur theorie equations integtales et ses applications, Verhandl. des Internat Math. Kongr. Zurich, 1932, Bd 1.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Класс бесконечных систем плавного перехода, сводящихся к Задаче Карлемана в кольце

Рассматривается система

$$\begin{cases} (\alpha_1 R^{-n} + \beta_1 R^n + \gamma_1) \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} u_k + (\alpha_2 R^{-n} + \beta_2 R^n + \gamma_2) \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} b_{n-k} v_k = g_{1n} \\ (\alpha_3 R^{-n} + \beta_3 R^n + \gamma_3) \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_{n-k} u_k + (\alpha_4 R^{-n} + \beta_4 R^n + \gamma_4) \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} d_{n-k} v_k = g_{2n} \\ \qquad n \ = \ 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ , \end{cases} \tag{A.1}$$

где коэффициенты a_n , b_n , c_n , d_n из пространства l_1, а последовательности $g_{1n} \in l_2$, $g_{2n} \in l_2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $|R| < 1$, и α_1 , α_2 , α_3 , α_4, β_1 , β_2 , β_3 , β_4, γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_4 – произвольные константы одновременно отличные от нуля. Последовательности u_k , v_k ищем в пространстве l_2.

К системе (A.1) применяем прямое преобразование Лорана и, используя теорему (о свертке), получим:

$$\begin{cases} A(t)[\alpha_1 U(R^{-1}t) \ + \ \beta_1 U(Rt) \ + \ \gamma_1 U(t)] + \\ + \, B(t)[\alpha_2 V(R^{-1}t) \ + \ \beta_2 V(Rt) \ + \ \gamma_2 V(t)] \ = \ G_1(t) \\ C(t)[\alpha_3 U(R^{-1}t) \ + \ \beta_3 U(Rt) \ + \ \gamma_3 U(t)] + \\ + \, D(t)[\alpha_4 V(R^{-1}t) \ + \ \beta_4 V(Rt) \ + \ \gamma_4 V(t)] \ = \ G_2(t) \\ |t| = 1 \ , \end{cases} \tag{A.2}$$

причем функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ отличны от нуля.

В общем виде матричная ЗК в кольце (A.2) не решена. Рассмотрим частные случаи, накладывая ограничения на константы α_k , β_k , γ_k , $k = \overline{1,4}$.

A.1) Пусть произвольные константы удовлетворяют условиям

$$\alpha_1 = \alpha_3 \ ; \ \alpha_2 = \alpha_4 \ ; \ \beta_1 = \beta_3 \ ; \ \beta_2 = \beta_4 \ ; \ \gamma_1 = \gamma_3 \ ; \ \gamma_2 = \gamma_4 \ , \tag{A.3}$$

тогда матричная ЗК в кольце (A.2) примет вид

$$\begin{cases} A(t)[\alpha_1 U(R^{-1}t) \ + \ \beta_1 U(Rt) \ + \ \gamma_1 U(t)] + \\ + \ B(t)[\alpha_2 V(R^{-1}t) \ + \ \beta_2 V(Rt) \ + \ \gamma_2 V(t)] \ = \ G_1(t) \\ C(t)[\alpha_1 U(R^{-1}t) \ + \ \beta_1 U(Rt) \ + \ \gamma_1 U(t)] + \\ + \ D(t)[\alpha_2 V(R^{-1}t) \ + \ \beta_2 V(Rt) \ + \ \gamma_2 V(t)] \ = \ G_2(t) \\ |t| = 1 \ . \end{cases} \tag{A.4}$$

Введем функции

$$H_1(t) = \alpha_1 U(R^{-1}t) \ + \ \beta_1 U(Rt) \ + \ \gamma_1 U(t) \quad ,$$

$$H_2(t) = \alpha_2 V(R^{-1}t) \ + \ \beta_2 V(Rt) \ + \ \gamma_2 V(t) \quad .$$

Тогда (A.4) примет вид

$$\begin{cases} A(t)H_1(t) \ + \ B(t)H_2(t) \ = \ G_1(t) \\ C(t)H_1(t) \ + \ D(t)H_2(t) \ = \ G_2(t) \quad , \ |t| = 1 \ . \end{cases} \tag{A.5}$$

Далее, решая систему (A.5) относительно неизвестных функций $H_1(t), H_2(t)$, получим

$$H_1(t) \ = \ \frac{D(t)G_1(t) \ - \ B(t)G_2(t)}{D(t)A(t) \ - \ B(t)C(t)} \ ; \ \ H_2(t) \ = \ \frac{A(t)G_2(t) \ - \ C(t)G_1(t)}{D(t)A(t) \ - \ B(t)C(t)} \ .$$

Итак, решение системы (A.4) свелось к решению двух независимых ЗК "о скачке"

$$H_1(t) = \alpha_1 U(R^{-1}t) \ + \ \beta_1 U(Rt) \ + \ \gamma_1 U(t) \ , \tag{A.6}$$

$$H_2(t) = \alpha_2 V(R^{-1}t) \ + \ \beta_2 V(Rt) \ + \ \gamma_2 V(t) \ . \tag{A.7}$$

Согласно теореме 2.1 при удовлетворении условия $2\gamma_1/(\alpha_1 + \beta_1) < 1$ задача (A.6) имеет решение причем единственное. Применяя к (A.6) обратное преобразование Лорана, получим

$$\alpha_1 R^{-n} u_n \ + \ \beta_1 R^n u_n \ + \ \gamma_1 u_n \ = \ h_{1n} \ ,$$

отсюда

$$u_n \ = \ \frac{h_{1n}}{\alpha_1 R^{-n} \ + \ \beta_1 R^n \ + \ \gamma_1} \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ , \tag{A.8}$$

где $h_{1n} = L^{-1}(H_1(t))$.

Из ЗК " о скачке " (A.7) находим неизвестную последовательность v_n

$$v_n = \frac{h_{2n}}{\alpha_2 R^{-n} + \beta_2 R^n + \gamma_2}, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ . \qquad (A.9)$$

Итак, пара последовательностей $\{u_n\}, \{v_n\}$ есть решение бесконечной системы плавного перехода (A.1) с ограничениями (A.3).

A.2) Пусть произвольные константы удовлетворяют условиям

$$\alpha_1 \neq 0 \ ; \ \alpha_4 \neq 0 \ ; \ \beta_2 \neq 0 \ ; \ \beta_3 \neq 0 \ ;$$

все остальные равны нулю. Тогда бесконечная система (A.1) примет вид

$$\begin{cases} \alpha_1 R^{-n} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} u_k + \beta_2 R^n \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} b_{n-k} v_k = g_{1n} \\ \beta_3 R^n \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_{n-k} u_k + \alpha_4 R^{-n} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} d_{n-k} v_k = g_{2n} \ , \end{cases} \qquad (A.10)$$

где a_n, b_n, c_n, d_n принадлежат l_1, $g_{1n} \in l_2$, $g_{2n} \in l_2$, $|R| < 1$. Решение u_k, v_k ищем в пространстве l_2.

Применяя преобразование Лорана к системе (A.10), получаем матричную ЗК в кольце вида (A.2):

$$\begin{cases} \alpha_1 A(t) U(R^{-1}t) + \alpha_2 B(t) V(Rt) = G_1(t) \\ \alpha_3 C(t) U(Rt) + \alpha_4 D(t) V(R^{-1}t) = G_2(t) \quad , \ |t| = 1 \ , \end{cases} \qquad (A.11)$$

где

$$A(t) \neq 0 \ , \ B(t) \neq 0 \ , \ C(t) \neq 0 \ , \ D(t) \neq 0 \ , \ |t| = 1.$$

Систему (A.11) запишем так

$$\begin{cases} U(R^{-1}t) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{B(t)}{A(t)} V(Rt) = \frac{G_1(t)}{\alpha_1 A(t)} \\ U(Rt) + \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \frac{D(t)}{C(t)} V(R^{-1}t) = \frac{G_2(t)}{\alpha_3 C(t)} \quad , \ |t| = 1. \end{cases} \qquad (A.12)$$

В силу условий, накладываемых на $A(t), B(t), C(t), D(t)$ очевидно, что имеет место нормальный случай $\frac{B(t)}{A(t)} \neq 0$ и принадлежит W, $\frac{D(t)}{C(t)} \neq 0$ и принадлежит W.

$$\frac{G_1(t)}{A(t)} \in L_2(|t| = 1), \qquad \frac{G_2(t)}{C(t)} \in L_2(|t| = 1).$$

Решение U(z), V(z) ищем в пространстве $\{\{R^{-1}\,,\,R\}\}$. Итак, получена матричная ЗК в кольце для двух пар функций вида (2.2.1). Сформулируем результаты в случае нулевого индекса в виде теоремы.

Теорема A.1 *Пусть выполняются следующие условия :*

a) *известные коэффициенты* $a_n,\,b_n,\,c_n,\,d_n$ *принадлежат* l_1;

b)

$$La_n \;=\; A(t)\;\neq\;0; \qquad Lb_n \;=\; B(t)\;\neq\;0;$$

$$Lc_n \;=\; C(t)\;\neq\;0; \qquad Ld_n \;=\; D(t)\;\neq\;0.$$

c) *заданые последовательности* $g_{1n}\,\in\,l_2\,,\,g_{2n}\,\in\,l_2$;

d)

$$Ind\,\frac{B(t)}{A(t)} \;=\; Ind\,\frac{C(t)}{D(t)} \;=\; 0.$$

Тогда система (A.10) имеет решение, которое строится по формулам:

$$u_k \;=\; L^{-1}U(t)\;\;,\;\;v_k\;=\;L^{-1}V(t),$$

где

$$U(t) = \mu_0\frac{X_1(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{G_1(\tau)d\tau}{\alpha_1 A(\tau)X_1(R^{-1}\tau)\tau}\;-$$

$$-\;\lambda_0\frac{X_1(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{G_2(\tau)d\tau}{\alpha_3 C(t)X_1(R\tau)\tau}\;\;,$$

$$V(t) = \frac{X_2(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{G_1(\tau)d\tau}{\alpha_1 A(\tau)X_1(R^{-1}\tau)\tau}\;-$$

$$-\;\frac{X_2(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega^{(2)}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{G_2(\tau)d\tau}{\alpha_3 C(t)X_1(R\tau)\tau}\;\;,$$

$$\lambda_0\;=\;exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}ln\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,\frac{B(\tau)}{A(\tau)}\right]\,\frac{d\tau}{\tau}\right)\;\;,$$

$$\mu_0\;=\;exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}ln\left[\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\,\frac{D(\tau)}{C(\tau)}\right]\,\frac{d\tau}{\tau}\right)\;\;,$$

$$\lambda_0\;\neq\;\mu_0\;,$$

$X_1(t)$ – *определяется формулой (2.2.17),* $X_2(t)$ – *определяется формулой (2.2.18).*

A.3) Пусть произвольные константы удовлетворяют условиям

$$\alpha_1 \neq 0 \ , \ \alpha_4 \neq 0 \ , \ \gamma_2 \neq 0 \ , \ \gamma_3 \neq 0 \quad ,$$

а все остальные равны нулю.

Тогда бесконечная система плавного перехода (A.1) после применения преобразование Лорана примет вид

$$\begin{cases} U(R^{-1}t) \ + \ \frac{\gamma_2}{\alpha_1}\frac{B(t)}{A(t)}V(t) \ = \ \frac{G_1(t)}{\alpha_1 A(t)} \\ U(t) \ + \ \frac{\alpha_4}{\gamma_3}\frac{D(t)}{C(t)}V(R^{-1}t) \ = \ \frac{G_2(t)}{\gamma_3 C(t)} \quad , \ |t| = 1, \end{cases} \qquad (A.13)$$

где $\frac{B(t)}{A(t)} \neq 0$ и принадлежит W; $\frac{D(t)}{C(t)} \neq 0$ и принадлежит W.

$$\frac{G_1(t)}{A(t)} \in L_2(|t|=1) \ , \ \frac{G_2(t)}{C(t)} \in L_2(|t|=1) \ .$$

Решение U(z), V(z) ищем в пространстве $\{\{R^{-1}\,,\,R\}\}$.

Получена матричная ЗК в кольце для двух пар функций вида (2.2.47).

A.4) В случае, если $\beta_1 \neq 0$, $\beta_4 \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$, $\gamma_3 \neq 0$, а все остальные равны нулю, из (A.1) получаем матричную ЗК в кольце для двух пар функций вида (2.2.48).